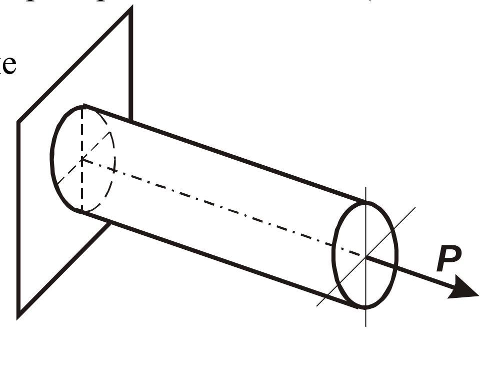
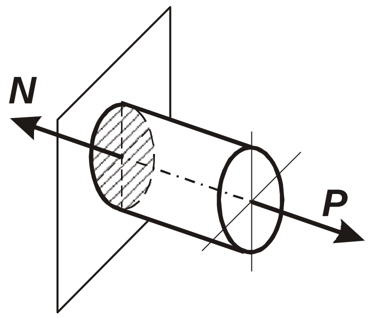
Растяжение-сжатие

Чтобы возникла деформация растяжения-сжатия, внешние нагрузки должны действовать вдоль продольной оси стержня. Тогда в поперечных сечениях возникает внутренний силовой фактор – <u>продольная сила</u> *N (Н, кН, 1кН=1000Н)*.

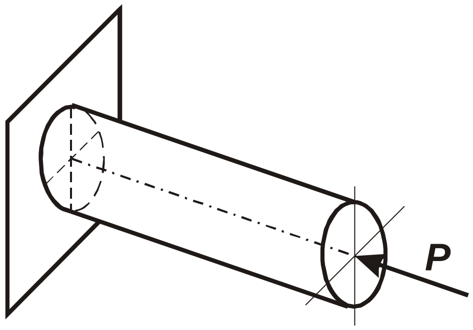
Растяжение

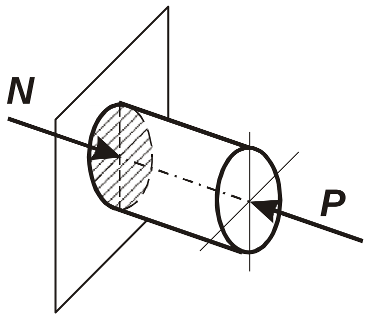




$N = +P$

Сжатие



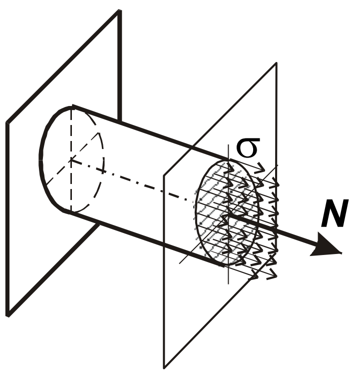


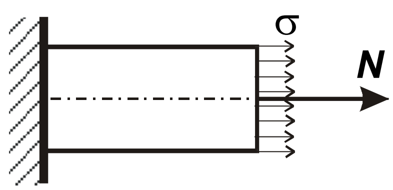
$N = -P$

Напряжение определяет интенсивность распределения внутренней силы по площади поперечного сечения.

При растяжении сжатии в поперечном сечении возникает <u>нормальное напряжение</u> σ *(Па, МПа,* $1Па=1Н/м^2$, $1МПа=10^6$ *Па)*. «Нормальное» - направленное по нормали к сечению, σ - *сигма*.

Напряжения распределены по сечению равномерно, т.е. одинаковы во всех точках сечения

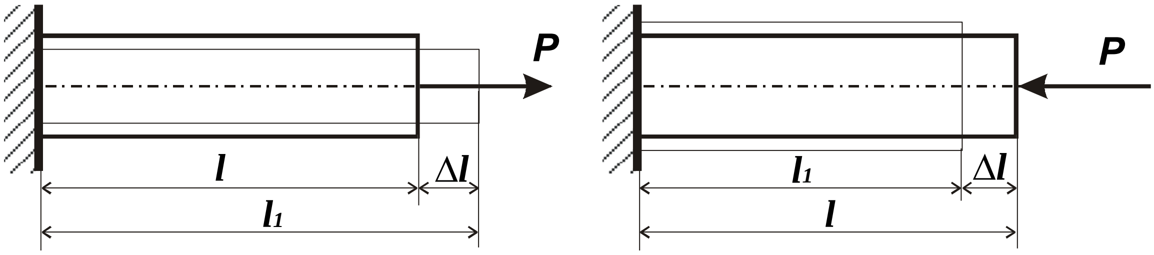




$$\boxed{\sigma = \frac{N}{F}}$$

F – площадь поперечного сечения.

Деформации при растяжении-сжатии:



Абсолютное удлинение $\Delta l = l_1 - l$ *(м)*, здесь l – начальная длина, l_1 – длина после деформации;

относительное удлинение $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ (безразмерная величина).

Правило знаков: при растяжении продольная сила, нормальное напряжение и деформации положительны, при сжатии – отрицательны.

Закон Гука при растяжении-сжатии

Нормальное напряжение пропорционально относительной продольной деформации:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon\,,}$$

E – модуль Юнга (жесткость материала), для стали $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа.*

Вторая форма закона Гука:

$$\boxed{\Delta l = \frac{Nl}{EF}}$$

EF – жесткость сечения при растяжении-сжатии, l - длина

Вычисление удлинений через напряжения:

$$\boxed{\Delta l = \frac{\sigma l}{E}}$$

Условие прочности при растяжении-сжатии

Наибольшие рабочие напряжения не должны превосходить допускаемые напряжения:

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{N}{F} \le [\sigma],}$$

$[\sigma]$ - допускаемое напряжение,

$$[\sigma]=\begin{cases}\dfrac{\sigma_т}{n}, \text{для пластичных материалов;}\\ \dfrac{\sigma_в}{n}, \text{для хрупких материалов;}\end{cases} \qquad n>1 - \text{коэффициент запаса .}$$

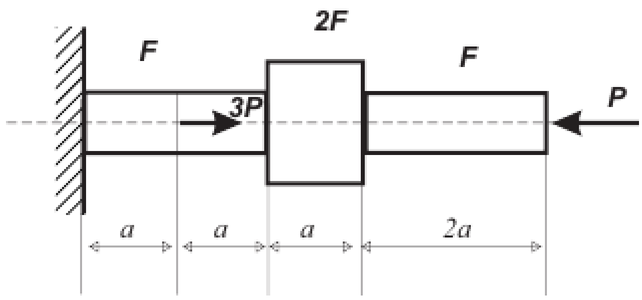
$\sigma_т$ - предел текучести, $\sigma_в$ - предел прочности – механические характеристики.

$\sigma_т$ - предел текучести, напряжение, при котором материал начинает течь, т.е. происходит рост пластических деформаций при постоянной нагрузке;

$\sigma_в$ - предел прочности, напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, которую материал выдержал до разрушения.

Из условия прочности может быть определена необходимую площадь поперечного сечения (форма сечения может быть любой): $F \ge \dfrac{N}{[\sigma]}$

Задача 1



Для статически определимого стержня необходимо:

- определить реактивную силу в жесткой заделке;
- определить продольные силы методом сечений, построить эпюру продольных сил;
- записать теоретические значения нормальных напряжений, определить опасный участок;
- составить условие прочности для опасного участка; определить площади поперечных сечений, исходя из условий прочности;
- вычислить рабочие значения напряжений, построить эпюру нормальных напряжений;
- вычислить удлинения участков нагружения и полное удлинение (укорочение) стержня;
- вычислить продольные перемещения поперечных сечений стержня, построить эпюру линейных перемещений поперечных сечений.

Исходные данные:

Материал стержня - сталь;

модуль упругости стали (жесткость материала) $E=2\ 10^5$ *МПа*$=2\ 10^{11}$ *Па*.

Допускаемое напряжение принять $[\sigma]=100\,МПа$.

Нагрузка $P=10$ *кН*; длина $a=0,1$ *м*.

$F, 2F$ - искомые площади поперечных сечений стержня.

Решение

Определим реактивную силу R_A, возникающую в жесткой заделке A. Уравнение равновесия – сумма проекций всех сил на продольную ось:

$$\sum P_{zi}=0: \qquad R_A-3P+P=0 \quad \Rightarrow \quad R_A=+2P$$

Определим продольные силы на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений. Двигаемся по стержню от свободного конца к заделке. Продольные силы направляем от сечения, что соответствует деформации растяжения. Если сила на участке получается отрицательной - участок сжат.

I участок: $0 \le z \le 2a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $N_1+P=0$, тогда $N_1=-P$, знак минус указывает на то, что участок находится в сжатом состоянии.

II участок: $2a \le z \le 3a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $N_2+P=0$, тогда $N_2=-P$, знак минус указывает на то, что участок находится в сжатом состоянии.

III участок: $3a \le z \le 4a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $N_3 + P = 0$, тогда $N_3 = -P$, знак минус указывает на то, что участок находится в сжатом состоянии.

IV участок: $4a \le z \le 5a$

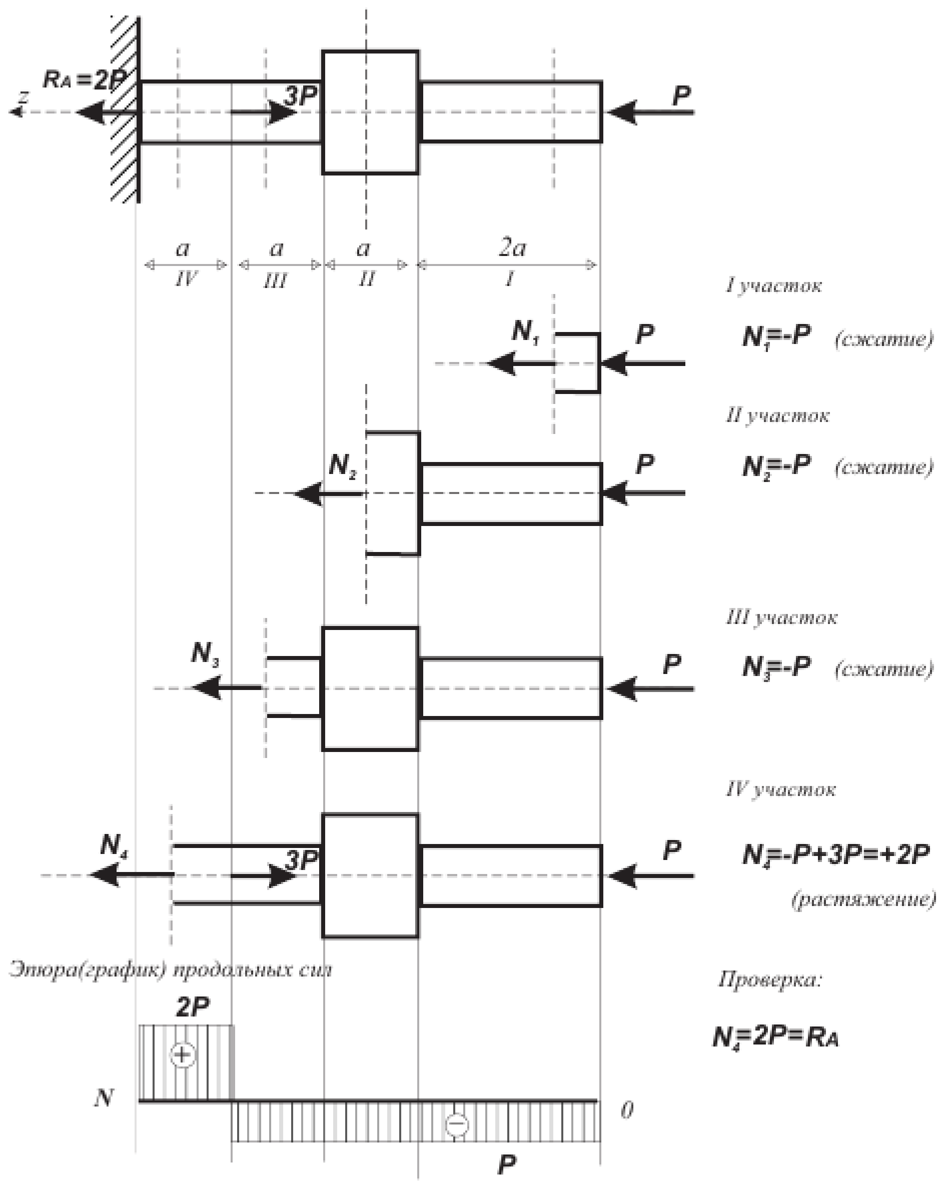
уравнение равновесия отсеченной части бруса: $N_4 + P - 3P = 0$,

тогда $N_4 = -P + 3P = +2P$, знак плюс указывает на то, что участок находится в растянутом состоянии.

Строим эпюру продольных сил N, откладывая положительные значения сил вверх от нулевой линии, отрицательные – вниз от нулевой линии. Значение продольной силы на последнем участке должно совпасть со значением реактивной силы в жесткой заделке:

$$N_4 = R_A = +2P.$$

Определение продольных сил на участках нагружения методом сечений



Нормальные напряжения характеризуют интенсивность распределения внутренних продольных сил по поперечному сечению стержня. При деформации растяжения-сжатия напряжения направлены так же, как и продольная сила (по нормали к поперечному сечению), и распределены равномерно по сечению. Напряжения на участках нагружения вычисляются, как отношение продольной силы к площади поперечного сечения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-P}{F}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-P}{2F} = -0{,}5\frac{P}{F}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{-P}{F}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{+2P}{F} = \sigma_{max}$$

Отрицательные значения напряжения принимают на сжатых участках стержня, положительные – на растянутом участке.

Опасным участком, т.е. участком на котором возникают максимальные по абсолютной величине напряжения, является четвертый участок нагружения.
Составим условие прочности для опасного участка:

$$\sigma_{max} = |\sigma_4| = 2\frac{P}{F} \le [\sigma]$$

Определим площадь сечения из условия прочности:

$$F \ge \frac{2P}{[\sigma]} = \frac{2 \cdot 10000\,Н}{100 \cdot 10^6\ Па} = 2 \cdot 10^{-4}\ м^2 = 2\ см^2$$

Принимаем $F = 2\ см^2, \quad 2F = 4\ см^2$

Вычислим рабочие (реальные) значения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня:

$$\sigma_1 = \frac{-P}{F} = \frac{-10000\,Н}{2 \cdot 10^{-4}\,м^2} = -50 \cdot 10^6\ Па = -50\ МПа$$

$$\sigma_2 = -0{,}5\frac{P}{F} = -0{,}5\frac{10000\,Н}{2 \cdot 10^{-4}\,м^2} == -25 \cdot 10^6\ Па = -25\ МПа$$

$$\sigma_3 = \frac{-P}{F} = \frac{-10000\,Н}{2 \cdot 10^{-4}\,м^2} = -50 \cdot 10^6\ Па = -50\ МПа$$

$$\sigma_4 = \frac{+2P}{F} = +2\frac{10000\,Н}{2 \cdot 10^{-4}\,м^2} = +100 \cdot 10^6\ Па = +100\ МПа$$

Строим эпюру нормальных напряжений σ, откладывая положительные значения напряжений вверх от нулевой линии, отрицательные – вниз от нулевой линии. На опасном участке напряжение равно допускаемому по абсолютной величине, на остальных участках – более низкие напряжения.

Вычислим абсолютные удлинения участков стержня (приращение их длины при деформации стержня от действия внешних нагрузок):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{-P}{F} \cdot \frac{2a}{E} = -2\frac{Pa}{EF}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = -0{,}5\frac{P}{F} \cdot \frac{a}{E} = -0{,}5\frac{Pa}{EF}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E F_3} = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = \frac{-P}{F} \cdot \frac{a}{E} = -\frac{Pa}{EF}$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l_4}{E F_4} = \frac{\sigma_4 l_4}{E} = \frac{+2P}{F} \cdot \frac{a}{E} = +2\frac{Pa}{EF}$$

Здесь E – модуль упругости материала (его жесткость),
длины участков нагружения $l_1 = 2a,\ l_2 = a,\ l_3 = a,\ l_4 = a$
Определим полное удлинение бруса, как сумму удлинений участков:

$$\Delta l_{полн} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = (-2 - 0{,}5 - 1 + 2)\frac{Pa}{EF} = -1{,}5\frac{Pa}{EF} =$$

$$= \frac{-1{,}5 \cdot 10000\,Н \cdot 0{,}1\,м}{2 \cdot 10^{11}\,Н/м^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\,м^2} = -\frac{0{,}15}{4} \cdot 10^{-3}\,м = -0{,}0375 \cdot 10^{-3}\,м = -0{,}0375\,мм$$

Абсолютная деформация стержня мала, так как мы производим расчет в зоне упругих деформаций, в зоне действия закона Гука. Значительно бóльшие (пластические) деформации возникают при текучести металла, но ограничение напряжений допускаемым значением предотвращает возникновение опасного состояния текучести в материале стержня.

Определим продольные перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения. Двигаемся по стержню от заделки к свободному концу.
Сечение A – неподвижно, так как оно жестко защемлено $\Delta_A = 0;$
Перемещение сечения B складывается из перемещения сечения A и удлинения участка AB между сечениями: $\Delta_B = \Delta_A + \Delta l_4 = +2\frac{Pa}{EF};$

Перемещение сечения C складывается из перемещения сечения B и удлинения участка BC между сечениями: $\Delta_C = \Delta_B + \Delta l_3 = (+2 - 1)\frac{Pa}{EF} = +1\frac{Pa}{EF};$

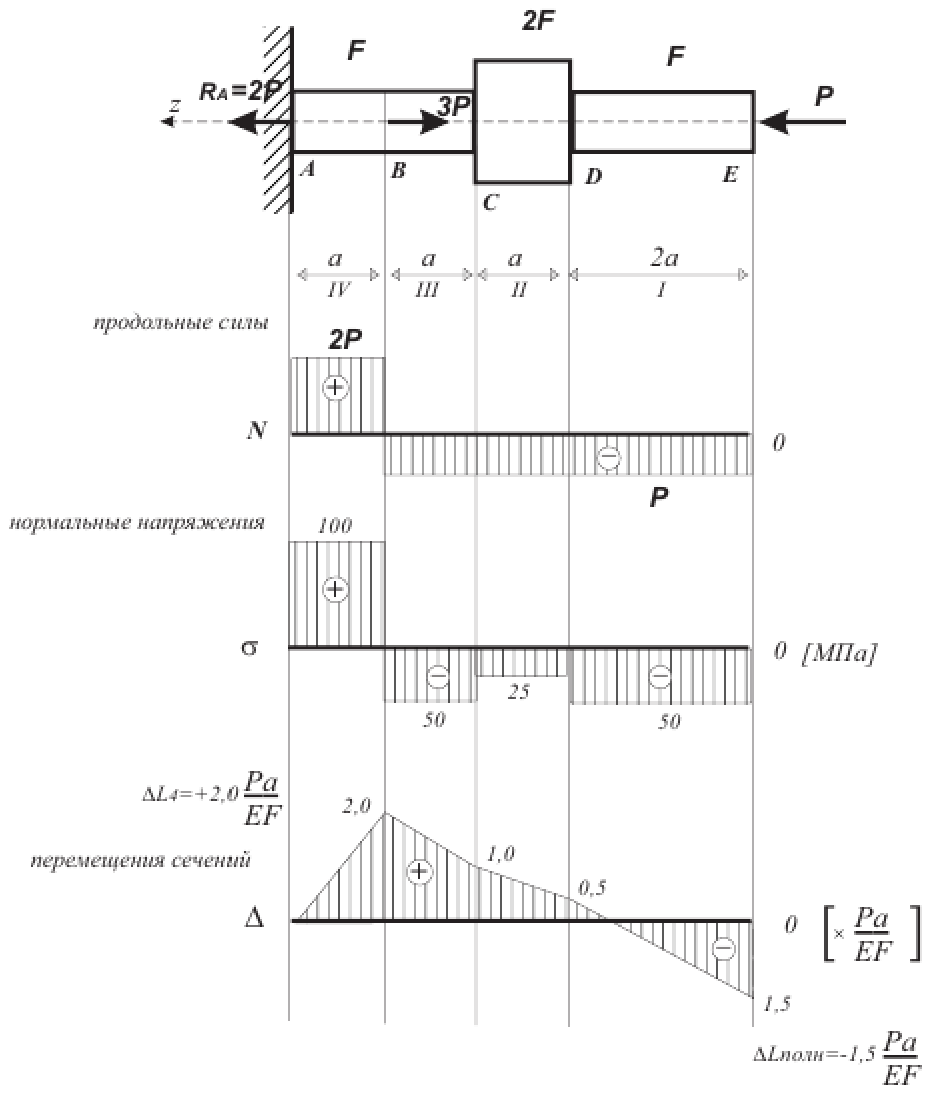
Перемещение сечения D складывается из перемещения сечения C и удлинения участка DC между сечениями: $\Delta_D = \Delta_C + \Delta l_2 = (+1 - 0{,}5)\frac{Pa}{EF} = +0{,}5\frac{Pa}{EF};$

Перемещение сечения E складывается из перемещения сечения D и удлинения участка ED между сечениями: $\Delta_E = \Delta_D + \Delta l_1 = (+0{,}5 - 2)\frac{Pa}{EF} = -1{,}5\frac{Pa}{EF}$.

Перемещение крайнего правого сечения E должно быть равно полному удлинению стержня:

$$\Delta_E = \Delta l_{полн} = -1{,}5\frac{Pa}{EF}.$$

Строим эпюру перемещений, соединяя перемещения в сечениях *A, B, C, D, E* прямыми наклонными линиями. Положительная область эпюры соответствует сечениям, переместившимся вправо - в сторону растягивающей нагрузки $3P$. Отрицательная область эпюры соответствует сечениям, переместившимся влево - в сторону сжимающей нагрузки P.


2F
F
F
$R_A=2P$
3P
P
z
A
B
C
D
E
a
a
a
2a
IV
III
II
I
продольные силы
2P
N
0
P
нормальные напряжения
100
σ
0 [МПа]
50
25
50
$\Delta L_4=+2{,}0\,\dfrac{Pa}{EF}$
2,0
перемещения сечений
1,0
0,5
Δ
0 $\left[\times\dfrac{Pa}{EF}\right]$
1,5
$\Delta L_{полн}=-1{,}5\,\dfrac{Pa}{EF}$

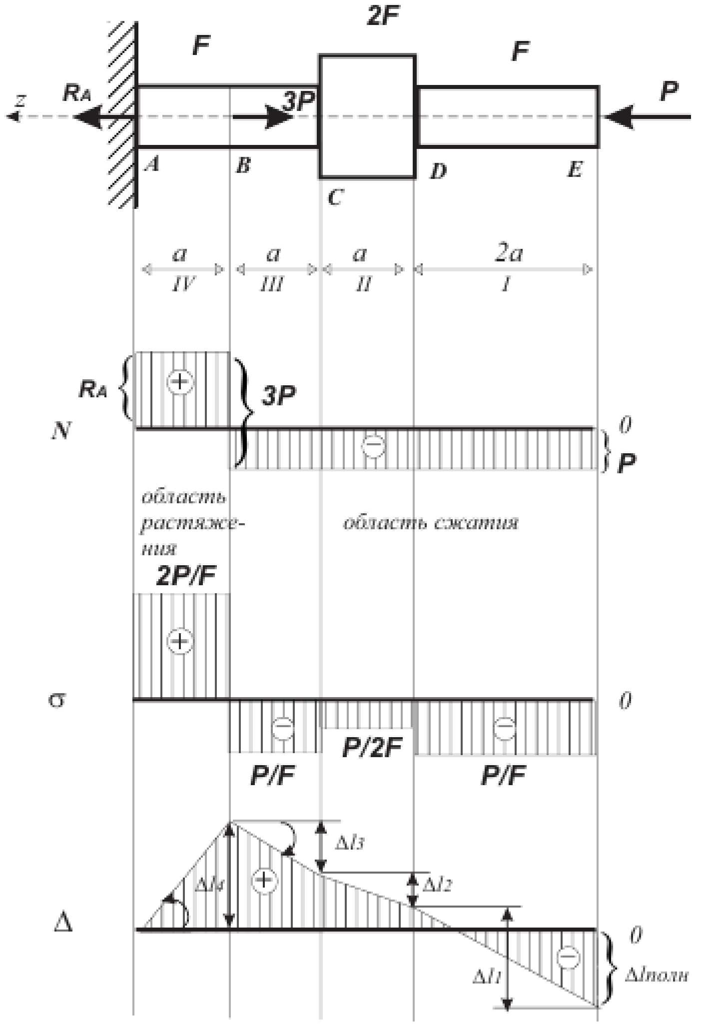
Правила контроля эпюр:

Эпюра продольныхсил ступенчатая, скачки на эпюре происходят по месту приложения нагрузок на величину этих нагрузок.

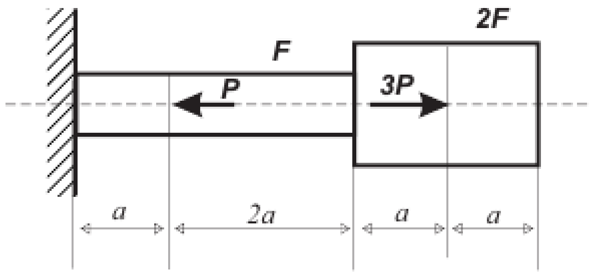
Эпюра нормальных напряжений ступенчатая, скачки на эпюре происходят по месту приложения нагрузок и по месту изменения размера поперечного сечения.

Области положительных значений (растяжение) и отрицательных значений (сжатие) на эпюрах сил и напряжений должны совпадать.

Эпюра перемещений поперечных сечений кусочно-линейная. Положительная область эпюры соответствует сечениям, переместившимся в сторону действия растягивающей нагрузки. Отрицательная область эпюры соответствует сечениям, переместившимся в сторону действия сжимающей нагрузки. При переходе из области растяжения в область сжатия меняется направление угла наклона эпюры к нулевой линии. Перемещение крайнего свободного сечения равно полному удлинению стержня.



Задача 2



Для статически определимого стержня необходимо:

- определить реактивную силу в жесткой заделке;
- определить продольные силы методом сечений, построить эпюру продольных сил;
- записать теоретические значения нормальных напряжений, определить опасный участок;
- составить условие прочности для опасного участка; определить площади поперечных сечений, исходя из условий прочности;
- вычислить рабочие значения напряжений, построить эпюру нормальных напряжений;
- вычислить удлинения участков нагружения и полное удлинение (укорочение) стержня;
- вычислить продольные перемещения поперечных сечений стержня, построить эпюру линейных перемещений поперечных сечений.

Исходные данные:

Материал стержня - сталь;

модуль упругости стали (жесткость материала) $E=2\ 10^5$ *МПа*$=2\ 10^{11}$ *Па*.

Допускаемое напряжение принять $[\sigma]=100\,МПа$.

Нагрузка $P=10$ *кН*; длина $a=0,1$ *м*.

F, $2F$ - искомые площади поперечных сечений стержня.

Решение

Определим реактивную силу R_A, возникающую в жесткой заделке A. Уравнение равновесия – сумма проекций всех сил на продольную ось:

$$\sum P_{zi}=0: \qquad R_A-3P+P=0 \quad \Rightarrow \quad R_A=+\,2P$$

Определим продольные силы на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений. Двигаемся по стержню от свободного конца к заделке.

I участок: $0\le z\le a$

$N_1=0,$ так как на участок внешние силы не действуют, участок не нагружен.

II участок: $a\le z\le 2a$

$N_2-3P=0$, тогда $N_2=+3P$, участок находится в растянутом состоянии.

III участок: $2a\le z\le 4a$

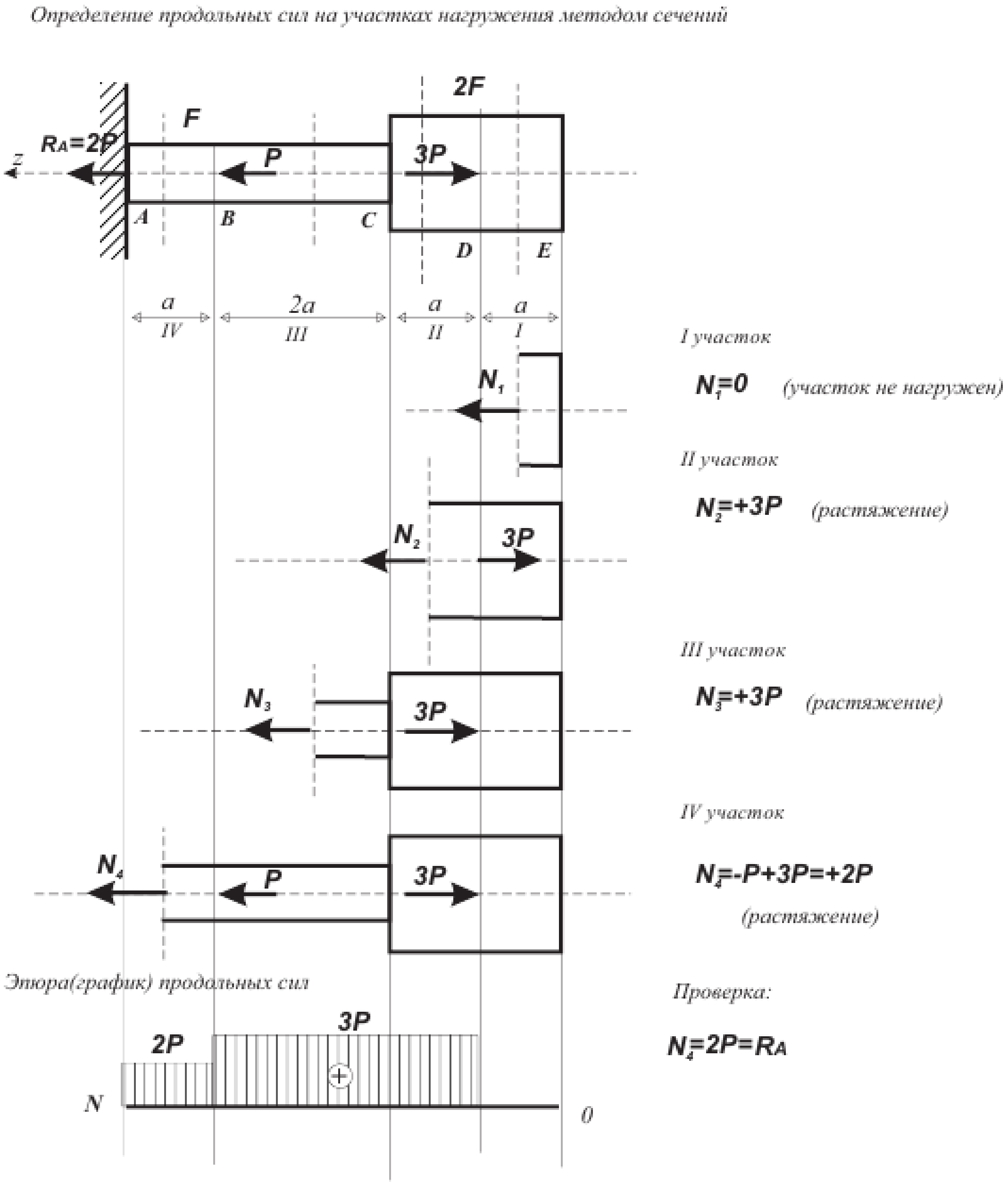
$N_3-3P=0$, тогда $N_3=+3P$, участок находится в растянутом состоянии.

IV участок: $4a\le z\le 5a$

$N_4-3P+P=0$, тогда $N_4=+3P-P=+2P$, что участок находится в растянутом состоянии.

Строим эпюру продольных сил N, откладывая положительные значения сил вверх от нулевой линии (весь стержень находится в состоянии растяжения). Значение продольной силы на последнем участке совпадает со значением реактивной силы в жесткой заделке:

$$N_4 = R_A = +2P.$$



Нормальные напряжения на участках нагружения вычисляются, как отношение продольной силы к площади поперечного сечения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{+3P}{2F} = +1{,}5\frac{P}{F}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{+3P}{F} = \sigma_{max}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{+2P}{F}$$

Опасным участком, т.е. участком на котором возникают максимальные по абсолютной величине напряжения, является третий участок нагружения.
Составим условие прочности для опасного участка:

$$\sigma_{max} = |\sigma_3| = 3\frac{P}{F} \le [\sigma]$$

Определим площадь сечения из условия прочности:

$$F \ge \frac{3P}{[\sigma]} = \frac{3 \cdot 10000\, Н}{100 \cdot 10^6\ Па} = 3 \cdot 10^{-4}\ м^2 = 3\ см^2$$

Принимаем $F = 3\ см^2, \quad 2F = 6\ см^2$

Вычислим рабочие значения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня:

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = +1{,}5\frac{P}{F} = +1{,}5\frac{10000\, Н}{3 \cdot 10^{-4}\ м^2} == +50 \cdot 10^6\ Па = +50\ МПа$$

$$\sigma_3 = \frac{+3P}{F} = +3\frac{10000\, Н}{3 \cdot 10^{-4}\ м^2} = +100 \cdot 10^6\ Па = +100\ МПа$$

$$\sigma_4 = \frac{+2P}{F} = +2\frac{10000\, Н}{3 \cdot 10^{-4}\ м^2} = +66{,}67 \cdot 10^6\ Па = +66{,}67\ МПа$$

Строим эпюру нормальных напряжений σ, откладывая положительные значения напряжений вверх от нулевой линии. На опасном участке напряжение равно допускаемому, на остальных участках – более низкие напряжения.

Вычислим абсолютные удлинения участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = 0$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = +1{,}5\frac{P}{F} \cdot \frac{a}{E} = +1{,}5\frac{Pa}{EF}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E F_3} = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = \frac{+3P}{F} \cdot \frac{2a}{E} = +6\frac{Pa}{EF}$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l_4}{E F_4} = \frac{\sigma_4 l_4}{E} = \frac{+2P}{F} \cdot \frac{a}{E} = +2\frac{Pa}{EF}$$

Здесь E – модуль упругости материала,
длины участков нагружения $l_1 = a,\ l_2 = 2a,\ l_3 = a,\ l_4 = a$
Определим полное удлинение бруса, как сумму удлинений участков:

$$\Delta l_{полн} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = (0 + 1{,}5 + 6 + 2)\frac{Pa}{EF} = +9{,}5\frac{Pa}{EF} =$$

$$= \frac{+9{,}5 \cdot 10000\, Н \cdot 0{,}1\, м}{2 \cdot 10^{11}\ Н/м^2 \cdot 3 \cdot 10^{-4}\ м^2} = +\frac{0{,}95}{6} \cdot 10^{-3}\ м = +0{,}1583 \cdot 10^{-3}\ м = +0{,}1583\ мм$$

Определим продольные перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения. Двигаемся по стержню от заделки к свободному концу.

$\Delta_A = 0$ - заделка;

$$\Delta_B = \Delta_A + \Delta l_4 = +2\frac{Pa}{EF};$$

$$\Delta_C = \Delta_B + \Delta l_3 = (+2+6)\frac{Pa}{EF} = +8\frac{Pa}{EF};$$

$$\Delta_D = \Delta_C + \Delta l_2 = (+8+1{,}5)\frac{Pa}{EF} = +9{,}5\frac{Pa}{EF};$$

$$\Delta_E = \Delta_D + \Delta l_1 = (+9{,}5+0)\frac{Pa}{EF} = +9{,}5\frac{Pa}{EF} = \Delta l_{полн}.$$

Строим эпюру перемещений, соединяя перемещения в сечениях *A, B, C, D, E* прямыми наклонными линиями. Так как первый участок не нагружен (деформация его равна нулю), все его сечения получили одинаковые перемещения.