Методические указания к решению задач для студентов заочного обучения

Исходные данные выбираются по номеру зачетной книжки

Задача №1

Стальной стержень ($E=2\ 10^5$ *МПа*) находится под действием продольной силы P. Построить эпюры продольных сил N, напряжений s, перемещений D. Проверить прочность стержня.

Исходные данные:

схема I;

$F=12$ *см*^{2}; $a=2{,}9$ *м*; $b=2{,}1$ *м*; $c=1{,}1$ *м*; $P=1900\ 10^2$ *Н*$=190$ *кН*, $E=2\cdot10^5$ *МПа*.

Решение

Уравнение равновесия: $SYi=0$: $R_A+R_D-P=0$

Степень статической неопределимости $s=m-n=2-1$, система один раз статически неопределима.

Для защемленного обоими концами стержня полное абсолютное удлинение должно быть равным нулю. Уравнение совместности деформаций

$$Dl=Dl_1+Dl_2+Dl_3=0$$

Определим продольные силы на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0\le z\le c$ $N_1=-R_D$,

II участок: $c\le z\le c+b$ $N_2=-R_D$,

III участок: $c+b\le z\le c+b+a$ $N_3=-R_D+P$

Тогда

$$Dl_1=\frac{N_1l_1}{EF_1}=\frac{-R_D\cdot c}{E\cdot F};$$

$$Dl_2=\frac{N_2l_2}{EF_2}=\frac{-R_D\cdot b}{E\cdot 2F};$$

$$Dl_3=\frac{N_3l_3}{EF_3}=\frac{\left(-R_D+P\right)\cdot a}{E\cdot F};$$

$$\textit{Тогда}\ \frac{-R_D\cdot c}{E\cdot F}+\frac{-R_D\cdot b}{E\cdot 2F}+\frac{\left(-R_D+P\right)\cdot a}{E\cdot F}=0$$

Разрешая это уравнение относительно R_D, получим

$$R_D=\frac{2aP}{2a+b+2c}=108{,}04\ \text{кН}.$$

Продольные усилия на участках нагружения статически неопределимого бруса

$N_1=-109{,}11$ *кН*

$N_2=-109{,}11$ *кН*

$N_3=80{,}89$ *кН*

Напряжения в поперечных сечениях статически неопределимого бруса

$$s_1=\frac{N_1}{F_1}=-90{,}92\ \text{МПа};$$

$$s_{\,2} = \frac{N_2}{F_2} = \textit{-45,46 МПа;}$$

$$s_{\,3} = \frac{N_3}{F_3} = \textit{67,41 МПа;}$$

Проверим прочность статически неопределимого стержня:

$s_{\max} = s_{\,1} = \textit{90,92 МПа} < [s\,] = 160\ \ \textit{МПа};$ прочность обеспечена.

Удлинения участков стержня

$$D\,l_{\,1} = \frac{s_{\,1}c}{E} = -\,0{,}500 \cdot 10^{-3}\,\textit{м}$$

$$D\,l_{\,2} = \frac{s_{\,2}b}{E} = -0{,}477 \cdot 10^{-3}\,\textit{м}$$

$$D\,l_{\,3} = \frac{s_{\,3}a}{E} = 0{,}674 \cdot 10^{-3}\,\textit{м}$$

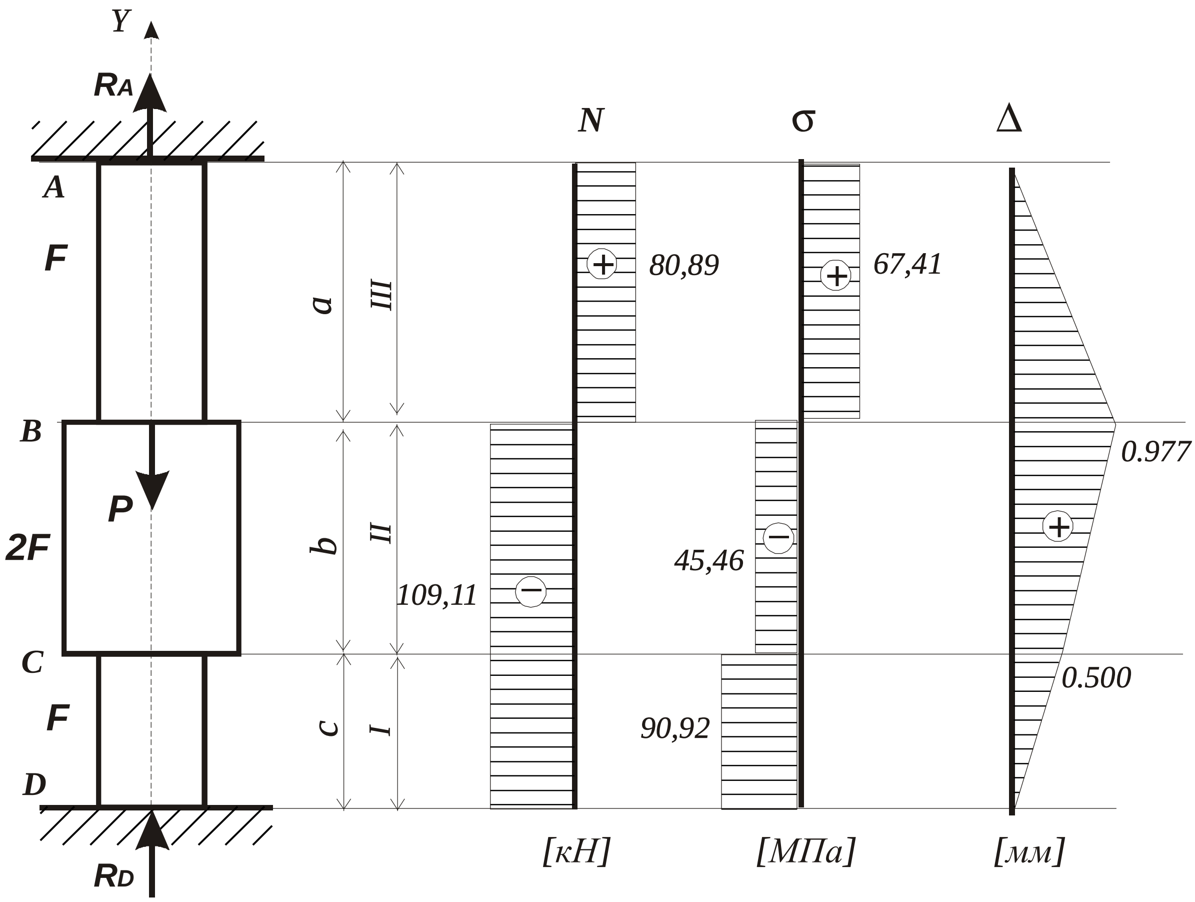
Определим перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

сечение A (жесткая заделка): $D_A = 0$;

сечение B : $D_B = D_A + D\,l_3 = 0{,}977$ *мм*;

сечение C: $D_C = D_B + D\,l_2 = 0{,}500$ *мм*;

сечение D : $D_D = D_C + D\,l_1 = 0$ - жесткая заделка.



Задача №3

Жесткий брус прикреплен к двум стальным стержням с площадью поперечного сечения F, опирающимся на неподвижное основание. К брусу прикреплен средний ступенчатый стальной стержень с зазором $D = b\ c$. Требуется:

1. установить при какой силе *H* зазор закроется;
2. найти реакцию основания в нижнем сечении среднего стержня при заданной силе *H* и построить эпюру продольных сил для среднего стержня;
3. найти усилия и напряжения в крайних стержнях при заданной силе *H*;
4. установить, на сколько градусов надо охладить средний стержень, чтобы реакция основания в нижнем сечении среднего стержня при заданной силе *H* обратилась в нуль.

Исходные данные:

схема II;

$F=12$ см^2; $c=1{,}2$ м; $H=140$ кН, $b=4\cdot10^{-5}$, температурный коэффициент линейного расширения стали $a=125\cdot10^{-7}$, $E=2\cdot10^5$ МПа.

Решение

1. Определим $H=H_0$, при которой $D_{H_0} = D$,

в этом случае $R=0$, $N_1=N_2=H_0$.

$$D_{H_0} = \frac{H_0 c}{EF} + \left(\frac{H_0 (c/2)}{E2F} + \frac{H_0 (c/2)}{E2F} + \frac{H_0 (c/4)}{EF} \right) = \frac{7}{4}\frac{H_0 c}{EF}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{4}\frac{H_0 c}{EF} = b\ c \qquad \Rightarrow H_0 = \frac{4}{7} b\ EF$$

Тогда $H_0=5{,}486$ кН.

2. Реакцию основания R определим из уравнения:

$$D_H - D_R = D$$

$$D_H = \frac{7}{4}\frac{H\ c}{EF}$$

$$D_R = \frac{\frac{R}{2}c}{EF} + \left(\frac{R(c/2)}{EF} + \frac{R(c/2)}{E2F} \right) = \frac{5}{4}\frac{Rc}{EF}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{4}\frac{Hc}{EF} - \frac{5}{4}\frac{Rc}{EF} = b\ c \qquad \Rightarrow R = \frac{7H}{5} - \frac{4bEF}{5} = 1{,}4(H - H_0)$$

Тогда $R=188{,}32$ кН.

Продольные усилия в среднем стержне

I участок:	$0 \le z \le 0{,}25c$	$N_1 = -R = -188{,}32$ кН,
II участок:	$0{,}25c \le z \le 0{,}5c$	$N_2 = -R + H = -48{,}32$ кН,
III участок:	$0{,}5c \le z \le c$	$N_3 = -R + 2H = +91{,}68$ кН

3. Усилия $N_1=N_2=N$ определим из уравнения равновесия верхнего бруса

$$2N - 2H + R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{-R + 2H}{2}$$

Тогда $N=45{,}84$ кН.

Напряжение $s = \dfrac{N}{F} = 38{,}20$ МПа.

4. При $R=0$ усилия $N=H$.

Dt найдем из уравнения

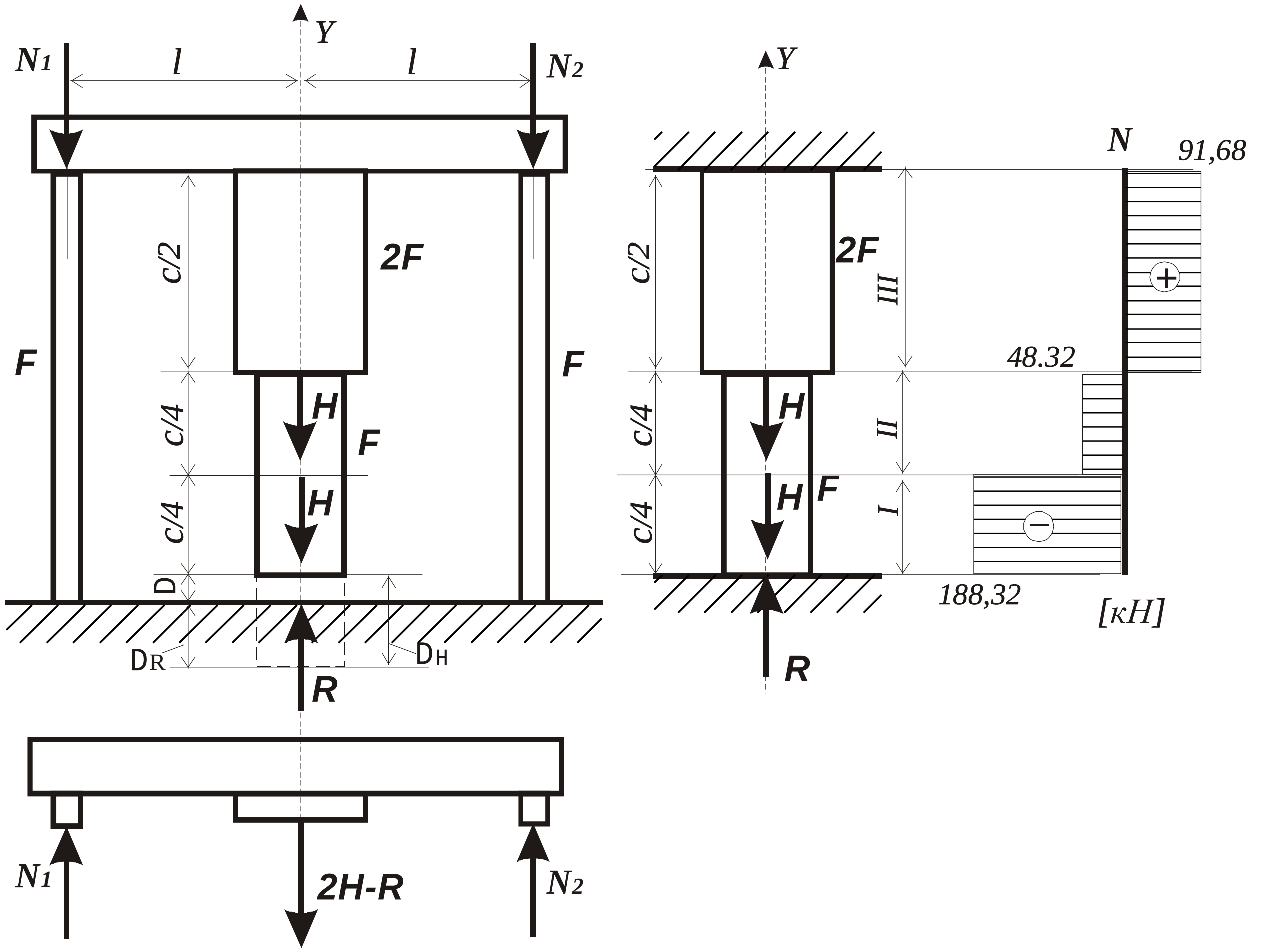
$$D_H - D_t = D$$

$$D_H = \frac{7}{4}\frac{Hc}{EF}, \qquad D_t = a\,Dt\,c$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{7}{4}\frac{Hc}{EF} - a\,Dt\,c = b\,c$$

$$\Rightarrow \qquad Dt = \frac{1}{a}\left(\frac{7}{4}\frac{H}{EF} - b\right)$$

Тогда $Dt = 78{,}47°$.



Задача №4

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю). Требуется найти:

1. главные напряжения и направление главных площадок;
2. максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений;
3. относительные деформации e_x, e_y, e_z;
4. относительное изменение объема;
5. удельную потенциальную энергию деформаций.

Исходные данные:

схема III;

s_x *=100 МПа;* s_y *=20 МПа;* t_x *=30 МПа;* коэффициент Пуассона и модуль упругости стали m*=0,3, E=2·10⁵ МПа*

Решение

1. Определим главные напряжения s_{max}, s_{min} и направление главных площадок, т.е. углы наклона главных площадок к площадкам, на которых действуют заданные напряжения s_x*= +100 МПа,* s_y*= -20 МПа .*

Учтем, что по закону парности касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. С учетом правила знаков для касательных напряжений $t_{x=}+t$, $t_y=-t$ (знак минус показывает, что касательные напряжения стремятся вращать элемент объема против часовой стрелки). Тогда

$$s_1 = s_{max} = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(s_x - s_y\right)^2 + 4t^2} = +107{,}082\ МПа;$$

$$s_2 = 0\ ;$$

$$s_3 = s_{min} = \frac{s_x + s_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(s_x - s_y\right)^2 + 4t^2} = -27{,}082\ МПа.$$

.

Угол, определяющий наклон главных площадок:

$$a_0 = \frac{1}{2}\, arctg\, \frac{2t_x}{s_x - s_y} = 0{,}232\ рад = 13{,}28°.$$

При $a_0 > 0$ исходная площадка поворачивается против часовой стрелки, при $a_0 < 0$ исходная площадка поворачивается по часовой стрелки.

2. Определим экстремальные касательные напряжения, равные полуразности главных напряжений:

$$t_{max} = \frac{s_{max} - s_{min}}{2} = 67{,}082\ МПа;$$

$$t_{min} = -\frac{s_{max} - s_{min}}{2} = -67{,}082\ МПа.$$

Экстремальные касательные напряжения действуют на площадках сдвига, наклоненных к главным площадкам под углом $45°$, и направлены от s_{min} к s_{max}

3. Определим относительные деформации e_x, e_y,e_z по обобщенному закону Гука:

$$e_x = \frac{1}{E}\left(s_x - m\left(s_y + s_z\right)\right);$$

$$e_y = \frac{1}{E}\left(s_y - m\left(s_z + s_x\right)\right);$$

$$e_z = \frac{1}{E}\left(s_z - m\left(s_x + s_y\right)\right).$$

Учтем, что при плоском напряженном состоянии s_z*=0*, тогда

$$e_x = \frac{1}{E}\left(s_x - m s_y\right) = 5{,}3\ 10^{-4};$$

$$e_y = \frac{1}{E}\left(s_y - m s_x\right) = -2{,}5\ 10^{-4};$$

$$e_z = -\frac{m}{E}\left(s_x + s_y\right) = -1{,}2\ 10^{-4}$$

4. Определим относительное изменение объема:

$$q=\frac{1-2m}{E}\left(s_1+s_2+s_3\right)=\frac{1-2m}{E}\left(s_x+s_y+s_z\right)=1{,}6\ 10^{-4},$$

или $q=e_x+e_y+e_z=1{,}6\ 10^{-4}$.

5. Определим удельную потенциальную энергию деформаций. Определим ее составляющие.

Удельная потенциальная энергия изменения объема равна

$$u_o=\frac{1-2m}{6E}\left(s_1+s_2+s_3\right)^2=0{,}002133.$$

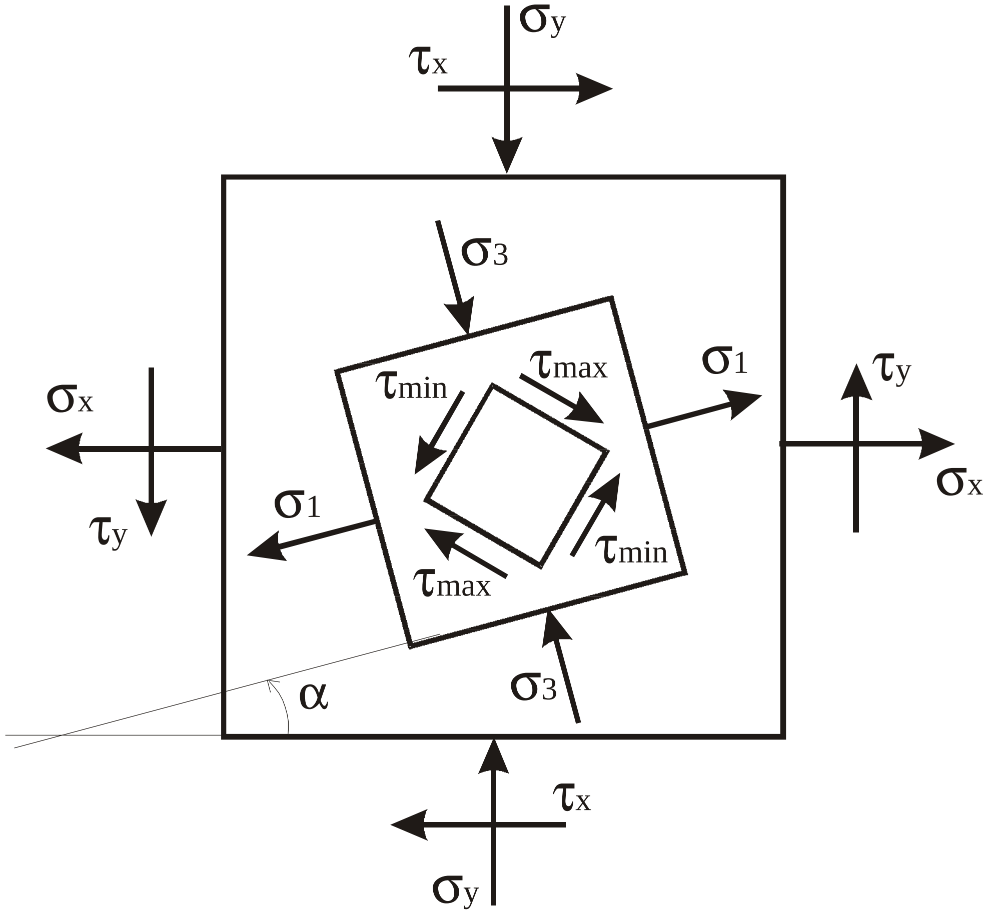
Удельная потенциальная энергия изменения формы равна

$$u_ф=\frac{1+m}{3E}\left(s_1^2+s_2^2+s_3^2-s_1s_2-s_1s_3-s_2s_3\right)=0{,}032717.$$

Полная удельная потенциальная энергия деформаций равна

$$u=u_o+u_ф=\frac{1}{2E}\left(s_1^2+s_2^2+s_3^2-2m\left(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3\right)\right)=0{,}034850,$$

или $u=\frac{1}{2E}\left(s_x^2+s_y^2-2m\,s_xs_y\right)+\frac{t_x^2}{2G}=0{,}034850.$



Задача №5

К стальному валу приложены три известных момента: M_1, M_2, M_3. Требуется:

6. установить при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю;
7. для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов;
8. при заданном значении $[t]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего, равного: *30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 100 мм*;
9. построить эпюру углов закручивания;

10. найти наибольший относительный угол закручивания.

Исходные данные:

схема IV;

a=1,9 м; b=1,2 м; c=1,4 м; M_1=1900 Нм; M_2=1200 Нм; M_3=1400 Нм; [t]=35 МПа, G=80000 МПа

Решение

1. Определим крутящие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок:	$0 \le z \le a$	$m_1 = -X$,
II участок:	$a \le z \le a + c$	$m_2 = -X - M_3$
III участок:	$a + c \le z \le a + c + b$	$m_3 = -X - M_3 - M_2$
IV участок:	$a + c + b \le z \le 2a + c + b$	$m_4 = -X - M_3 - M_2 + M_1$

Полный угол закручивания должен быть равным нулю:

$j = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 0$, где

$$j_1 = \frac{m_1 a}{G J_p} = \frac{(-X)a}{G J_p};$$

$$j_2 = \frac{m_2 c}{G J_p} = \frac{(-X - M_3)c}{G J_p};$$

$$j_3 = \frac{m_3 b}{G J_p} = \frac{(-X - M_3 - M_2)b}{G J_p};$$

$$j_4 = \frac{m_4 a}{G J_p} = \frac{(-X - M_3 - M_2 + M_1)a}{G J_p};$$

Тогда

$$(-X)a + (-X - M_3)c + (-X - M_3 - M_2)b + (-X - M_3 - M_2 + M_1)a = 0$$

$$X = \frac{M_1 a - M_2(a + b) - M_3(a + b + c)}{2a + b + c}$$

Получим $X=-1001{,}56\ Н\,м.$

2. Крутящие моменты на участках нагружения

I участок:	$m_1 = 1001{,}56\ Н\,м,$
II участок:	$m_2 = -398{,}44\ Н\,м,$
III участок:	$m_3 = -1598{,}44\ Н\,м,$
IV участок:	$m_4 = 301{,}56\ Н\,м.$

3. Опасным участком, т.е. участком на котором возникают максимальные касательные напряжения, является третий участок нагружения.

Составим условия прочности для опасного участка вала.

$$t_{\max} = \frac{m_3}{W_p} \le [t] = 35\ МПа$$

$$W_p = \frac{p\, D^3}{16} = 0{,}1963\, D^3$$

Определим диаметр D из условия прочности:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{m_3}{[t]\cdot 0{,}1963}} = 0{,}0615 \text{ м} = 61{,}5 \text{ мм}.$$

Принимаем $D = 0{,}07$ *м* = *70 мм*

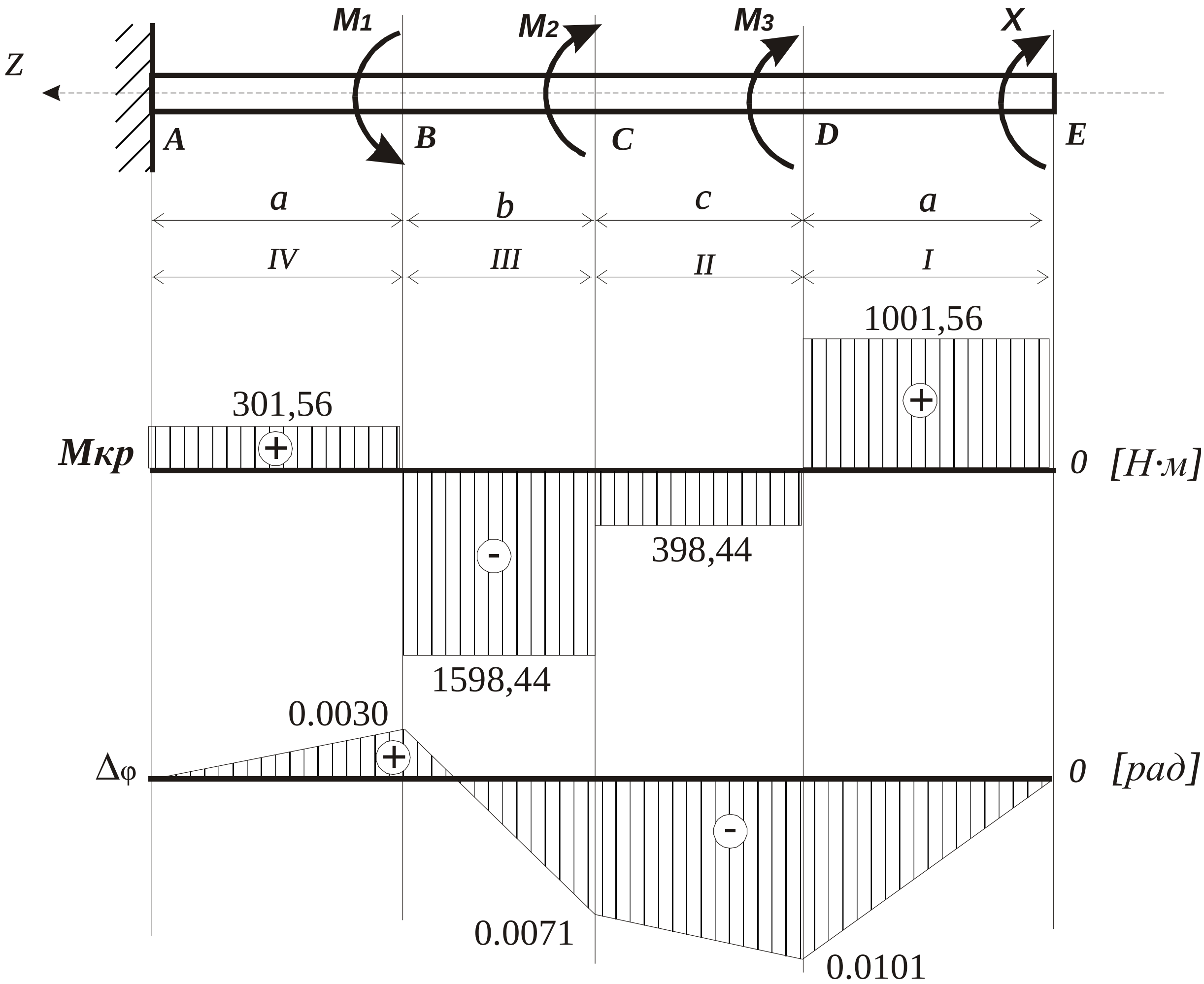
Вычислим геометрические характеристики поперечных сечений вала:

Полярный момент сопротивления сечения:

$$W_p = \frac{p\,D^3}{16} = 0{,}1963\,D^3 = 67{,}35\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3;$$

Полярный момент инерции сечения

$$J_p = \frac{p\,D^4}{32} = 0{,}0982\,D^4 = 235{,}72\cdot 10^{-8}\ \text{м}^4;$$



4. Определим абсолютные углы закручивания участков вала:

$$j_1 = \frac{m_1 a}{G\,J_p} = 0{,}0101\ \text{рад};$$

$$j_2 = \frac{m_2 c}{G\,J_p} = -0{,}0030\ \text{рад};$$

$$j_3 = \frac{m_3 b}{G\,J_p} = -0{,}0102\ \text{рад};$$

$$j_4 = \frac{m_4 a}{G\,J_p} = 0{,}0030\ \text{рад}$$

Полный угол закручивания вала

$j = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 0$

Определим угловые перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

сечение *A* (жесткая заделка): $D_j^A = 0;$

сечение *B* : $D_j^B = D_j^A + j_4 = 0{,}0030\,рад;$

сечение *C*: $D_j^C = D_j^B + j_3 = -0{,}0071\,рад;$

сечение *D* : $D_j^D = D_j^C + j_2 = -0{,}0101\,рад;$

сечение *E* : $D_j^E = D_j^D + j_1 = 0$

5. Наибольший относительный угол закручивания

$$q_{\max} = \frac{m_{\max}}{G J_p} = \frac{m_3}{G J_p} = 0{,}0085\ \frac{рад}{м}$$

Задача №7

Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка или из двутавра и равнобокого уголка, или из швеллера и двутавра, требуется:

1. определить положение центра тяжести;
2. найти осевые и центробежные моменты инерции относительно центральных осей x_c и y_c;
3. определить направление главных центральных осей *u* и *v*;
4. найти главные моменты инерции;
5. вычертить сечение в масштабе 1:2.

Исходные данные:

схема V;

швеллер *№20*; равнобокий уголок *90×90×6*; двутавр *№20а*.

Решение

Задано составное сечение, состоящее из равнобокого уголка *90×90×6* и двутавра *№20а*. Выбираем следующие данные по таблицам ГОСТа для сортового проката:

Равнобокий уголок *90×90×6 (ГОСТ 8509-86)*

$b=90$ *мм* - ширина полки, $t=6$ *мм* - толщина полки, $F=10{,}61$ *см*^{2} – площадь сечения, $z_0=2{,}43$ *см* - положение центра тяжести, $J_x=J_y=82{,}10$ *см*^{4} - осевые моменты инерции относительно центральных осей, $J_{xy}=48{,}10$ *см*^{4} - центробежный момент инерции.

Двутавр *№20а (ГОСТ 8239-89)*

$h=200$ *мм* - высота, $b=110$ *мм* - ширина полки, $s=5{,}2$ *мм* - толщина стенки, $t=8{,}6$ *мм* - толщина полки, $F=28{,}9$ *см*^{2} – площадь сечения, $J_x=2030$ *см*^{4}, $J_y=155$ *см*^{4} - осевые моменты инерции относительно центральных осей двутавра.

Вычерчиваем заданное сечение в масштабе *1:2*. Выбираем исходные оси *X0Y* таким образом, чтобы они были параллельны сторонам составного сечения и проходили через центры тяжести двутавра C_1 и уголка C_2.

Для каждого элемента сечения проведем собственные центральные оси.

Координаты центров тяжести элементов сечения в выбранных осях, их площади и моменты инерции приведены в таблице.

№	Площадь *Fi*	Координаты ц.т.		Моменты инерции		
	см^2	x_i	y_i	J_{xi}	J_{yi}	J_{xiyi}
		см	*см*	*см*^{4}	*см*^{4}	*см*^{4}
1(двутавр)	*28,9*	*3,07*	*0,0*	*2030,0*	*155,0*	*0,0*
2(уголок)	*10,61*	*0,0*	*12,43*	*82,10*	*82,10*	*48,10*
Составное сечение	*39,51*	*2,25*	*3,34*	*3311,18*	*310,24*	*-248,05*

Координаты центров тяжести частей сечения в выбранной системе осей *X0Y* (все размеры взяты в *см*, индекс *1* соответствует двутавру, индекс *2* - уголку)

$x_1 = 0{,}5b_1 - z_{02}$ =*3,07 см*

$y_1 = 0$

$x_2 = 0$

$y_2 = 0{,}5h_1 + z_{02}$ =*12,43 см*

Площадь составного сечения

$F = F_1 + F_2$

Статические моменты площади определялись:

$S_x^i = y_i \cdot F_i$

$S_y^i = x_i \cdot F_i$

Координаты центра тяжести составного сечения определены по формулам

$$x_C = \frac{S_y^1 + S_y^2}{F} = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2}{F_1 + F_2} = 2{,}25 \text{ см}$$

$$y_C = \frac{S_x^1 + S_x^2}{F} = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2}{F_1 + F_2} = 3{,}34 \text{ см}$$

Расстояние между соответствующими собственными центральными осями элементов и центральными осями всего составного сечения

$a_i = y_i - y_C$

$b_i = x_i - x_C$

№	a_i	b_i
	см	*см*
1(двутавр)	*-3,34*	*0,82*
2(уголок)	*9,09*	*-2,25*

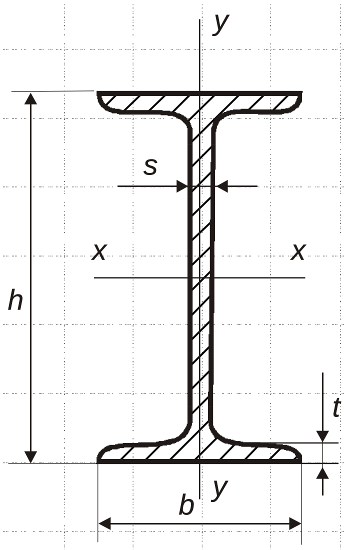
Проверка $\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{|b_1|}{|b_2|} = \frac{F_2}{F_1} = 0{,}367$

Осевые и центробежный моменты относительно центральных осей *Xc, Yc* вычисляются по формулам

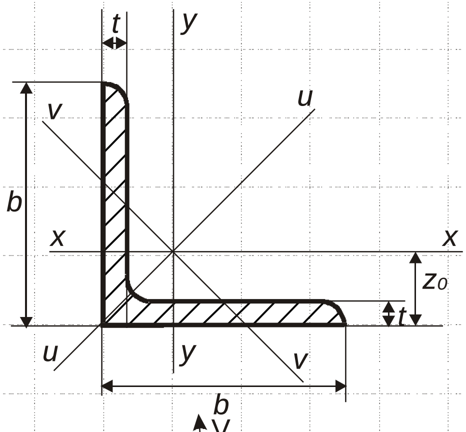
$$J_{Xc} = J_{Xc}^1 + J_{Xc}^2 = J_{X1}^1 + a_1^2 F_1 + J_{X2}^2 + a_2^2 F_2 = 3311{,}18 \text{ см}^4$$

$$J_{Yc} = J_{Yc}^1 + J_{Yc}^2 = J_{Y1}^1 + b_1^2 F_1 + J_{Y2}^2 + b_2^2 F_2 = 310{,}24 \text{ см}^4$$

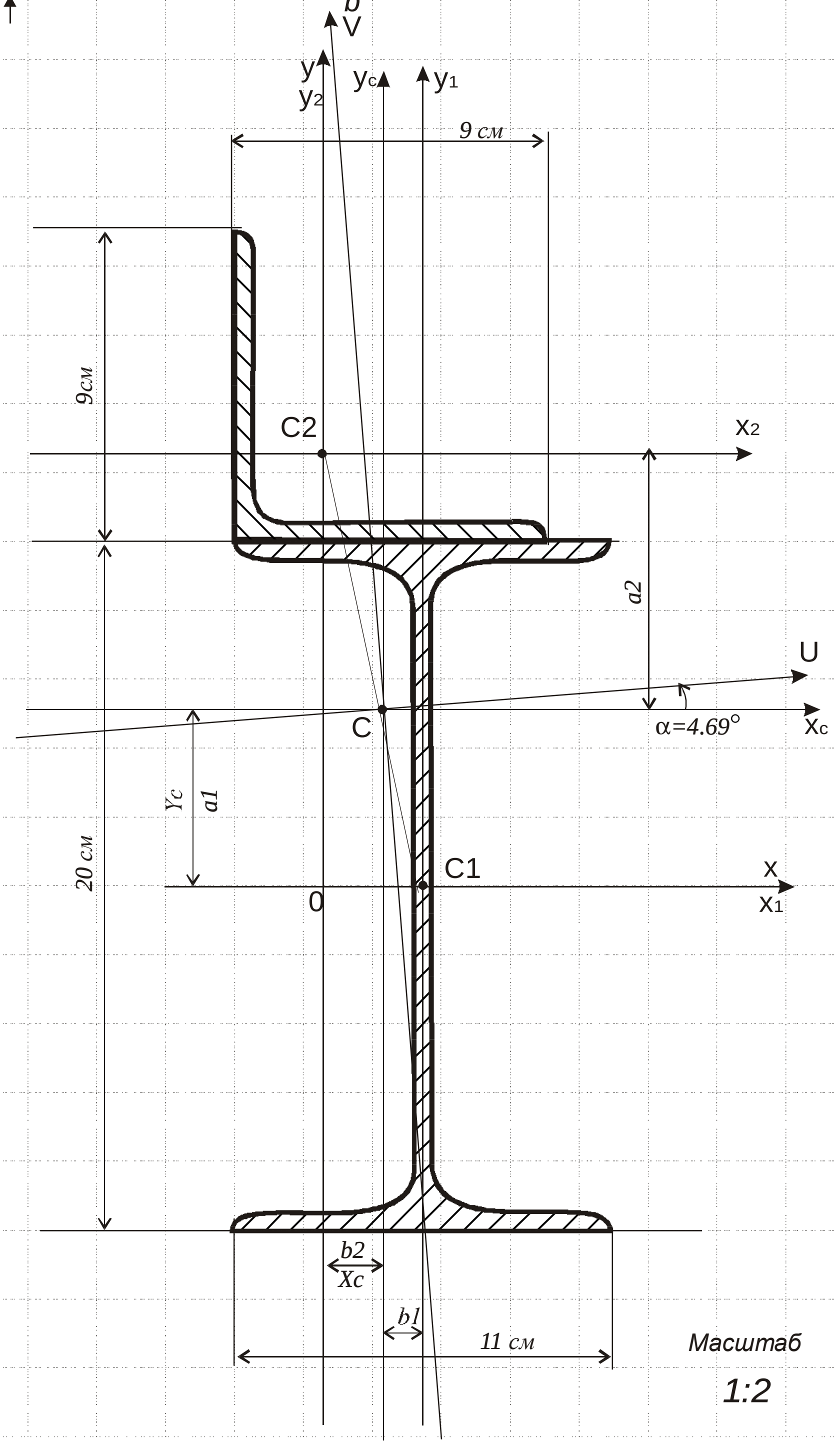
$$J_{XcYc} = J_{XcYc}^1 + J_{XcYc}^2 = J_{X1Y1}^1 + a_1 b_1 F_1 + J_{X2Y2}^2 + a_2 b_2 F_2 = -248{,}05 \text{ см}^4$$



y
s
x
x
h
t
y
b



t
y
v
u
b
x
x
z0
t
u
y
v
b



V
y
y2
yc
y1
9 см
9см
C2
x2
a2
U
C
α=4.69°
xc
Yc
a1
20 см
C1
x
0
x1
b2
Xc
b1
11 см

Масштаб

1:2

Положение главных центральных осей инерции U,V определяется через угол a, который они составляют с центральными осями Xc,Yc (положительное значение угла отсчитывается против хода часовой стрелки)

$$a = \frac{1}{2} arctg \frac{2J_{XcYc}}{J_{Yc} - J_{Xc}} = 0{,}082 \text{ рад} = 4{,}69°$$

По результатам расчетов нанесем на чертеж: центр тяжести всего сечения; центральные оси; главные центральные оси.

Главные центральные моменты инерции сечения

$$J_U = J_{Xc} cos^2 a + J_{Yc} sin^2 a - J_{XcYc} sin\, 2a = 3331{,}54 \text{ см}^4$$

$$J_V = J_{Xc} sin^2 a + J_{Yc} cos^2 a + J_{XcYc} sin\, 2a = 289{,}88 \text{ см}^4$$

Кроме того, главные центральные моменты инерции сечения могут быть вычислены по формулам:

$$J_{\max} = \frac{J_{Xc} + J_{Yc}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_{Xc} - J_{Yc}\right)^2 + 4J_{XcYc}^2} = 3331{,}54 \text{ см}^4$$

$$J_{\min} = \frac{J_{Xc} + J_{Yc}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_{Xc} - J_{Yc}\right)^2 + 4J_{XcYc}^2} = 289{,}88 \text{ см}^4$$

Выполним аналитическую проверку.

$$J_{Xc} + J_{Yc} = J_U + J_V = 3621{,}42 \text{ см}^4$$

$$J_{UV} = J_{XcYc} \cos 2a - \frac{J_{Xc} - J_{Yc}}{2} \sin 2a = 0$$

Задача №8

Для заданных двух схем балок требуется написать выражения для каждого участка и построить эпюры Q и M; подобрать

1. для схемы *(а)* деревянную балку круглого поперечного сечения при $[s]=8$ *МПа*;
2. для схемы *(б)* стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[s]=180$ *МПа*.

Исходные данные:

схема VI;

$l_1=1{,}1$ *м*; $l_2=6$ *м*; $a_1=9a$; $a_2=9a$; $a_3=1a$; $M=9$ *кНм*; $P=10$ *кН*; $q=6$ *кН/м*.

Решение

Схема *а*

Для консольной балки определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, рассматривая участки балки от свободного конца к заделке.

I участок: $0 \le z \le a = 0{,}11 \text{ м}$

$Q_1 = 0$

$M_1 = 0$

II участок: $a \le z \le 10a = 1{,}1 \text{ м}$

$Q_2 = q(z-a) - P$

$M_2 = -0{,}5q(z-a)^2 + P(z-a)$

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=a)} = -10\ кН$ $\qquad$ $Q_{2(z=10a)} = -4{,}06\ кН$

$M_{2(z=a)} = 0$ $\qquad$ $M_{2(z=10a)} = 6{,}96\ кНм$

Значение момента в опасном сечении

$M_{max} = 6{,}96\ кНм$ - по этому значению изгибающего момента ведется расчет на прочность.

Условие прочности

$$s_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \le [s] = 8\ МПа,$$

$$\Rightarrow \quad W_x \ge \frac{|M_{max}|}{[s]} = 869{,}96\ см^3$$

Подбор круглого сечения

$$W_x = \frac{pd^3}{32}$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32W_x}{p}} = 0{,}207\ м = 20{,}7\ см \qquad F = \frac{pd^2}{4} = 336{,}54\ см^2$$

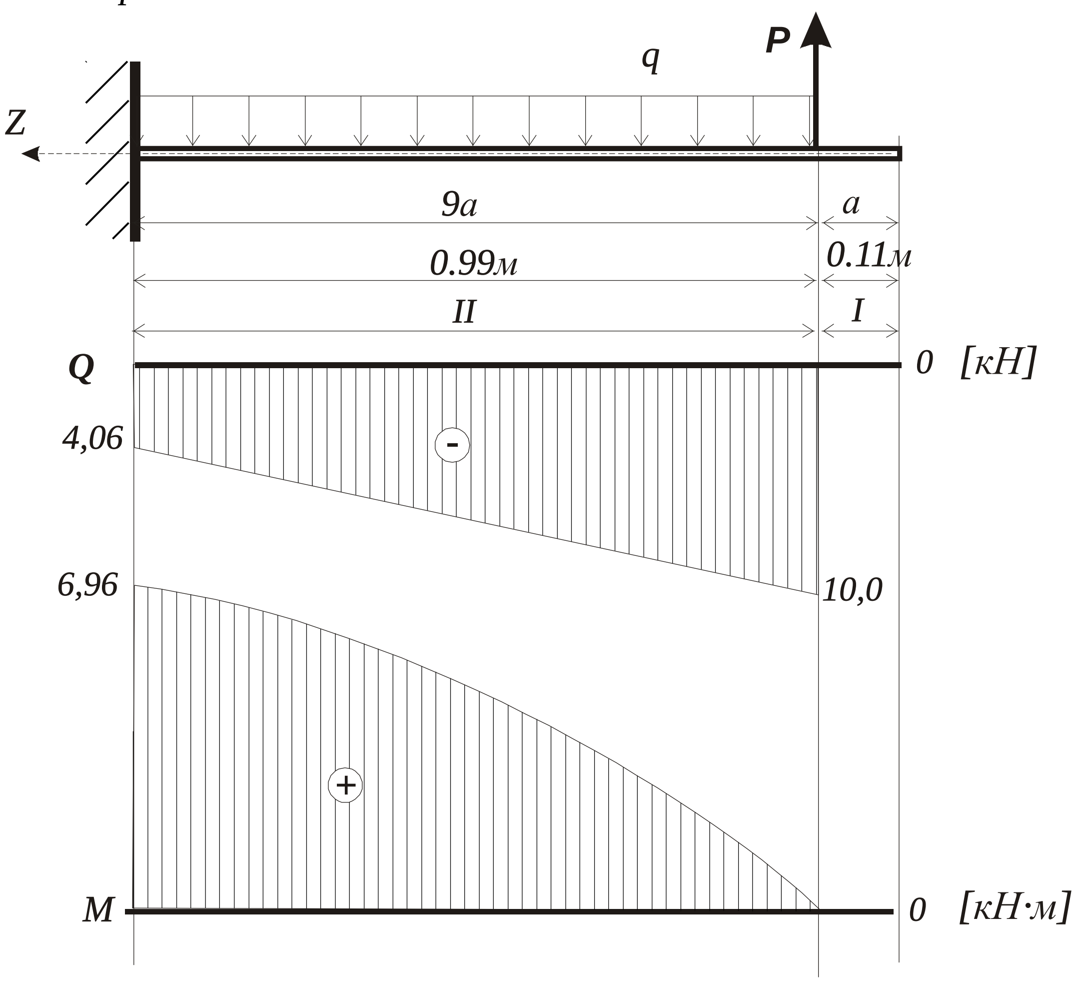


Схема *б*

Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A, R_B. Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_A \cdot 10a - P \cdot a + q \cdot 9a \cdot 5{,}5a - M = 0 \\ -R_B \cdot 10a + P \cdot 11a + q \cdot 9a \cdot 4{,}5a + M = 0 \end{cases}$$

$$R_A = \frac{-P \cdot a + q \cdot 9a \cdot 5{,}5a - M}{10a} = 15{,}32\,кН;$$

$$R_B = \frac{P \cdot 11a + q \cdot 9a \cdot 4{,}5a + M}{10a} = 27{,}08\,кН;$$

проверка

$$\sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A + R_B - q \cdot 9a - P = 0;$$

проверка сошлась

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \le z \le a = 0{,}6\,м$ (справа)

$Q_1 = P$

$M_1 = -Pz$

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = 10\,кН$ $\quad Q_{1(z=a)} = 10\ кН$

$M_{1(z=0)} = 0$ $\quad M_{1(z=a)} = -6{,}0\,кН\ м$

II участок: $a \le z \le 2a = 1{,}2\,м$

$Q_2 = P - R_B$

$M_2 = -Pz + R_B(z-a)$

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=a)} = -17{,}08\,кН$ $\quad Q_{2(z=2a)} = -17{,}08\,кН$

$M_{2(z=a)} = -6{,}0\,кНм$ $\quad M_{2(z=2a)} = 4{,}25\,кНм$

IV участок: $0 \le z \le a = 0{,}6\,м$ (слева)

$Q_4 = R_A - qz$

$M_4 = R_A z - 0{,}5qz^2$

Тогда на границах участка

$Q_{4(z=0)} = 15{,}32\,кН$ $\quad Q_{4(z=a)} = 11{,}72\,кН$

$M_{4(z=0)} = 0$ $\quad M_{4(z=a)} = 8{,}11\,кНм$

III участок: $a \le z \le 8a = 4{,}8\,м$

$Q_3 = R_A - qz$

$M_3 = M + R_A z - 0{,}5qz^2$

Тогда на границах участка

$Q_{3(z=a)} = 11{,}72\,кН$ $\quad Q_{3(z=8a)} = -17{,}08\,кН$

$M_{3(z=a)} = 17{,}11\,кНм$ $\quad M_{3(z=8a)} = 4{,}25\,кНм$

Максимальное значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату сечения:

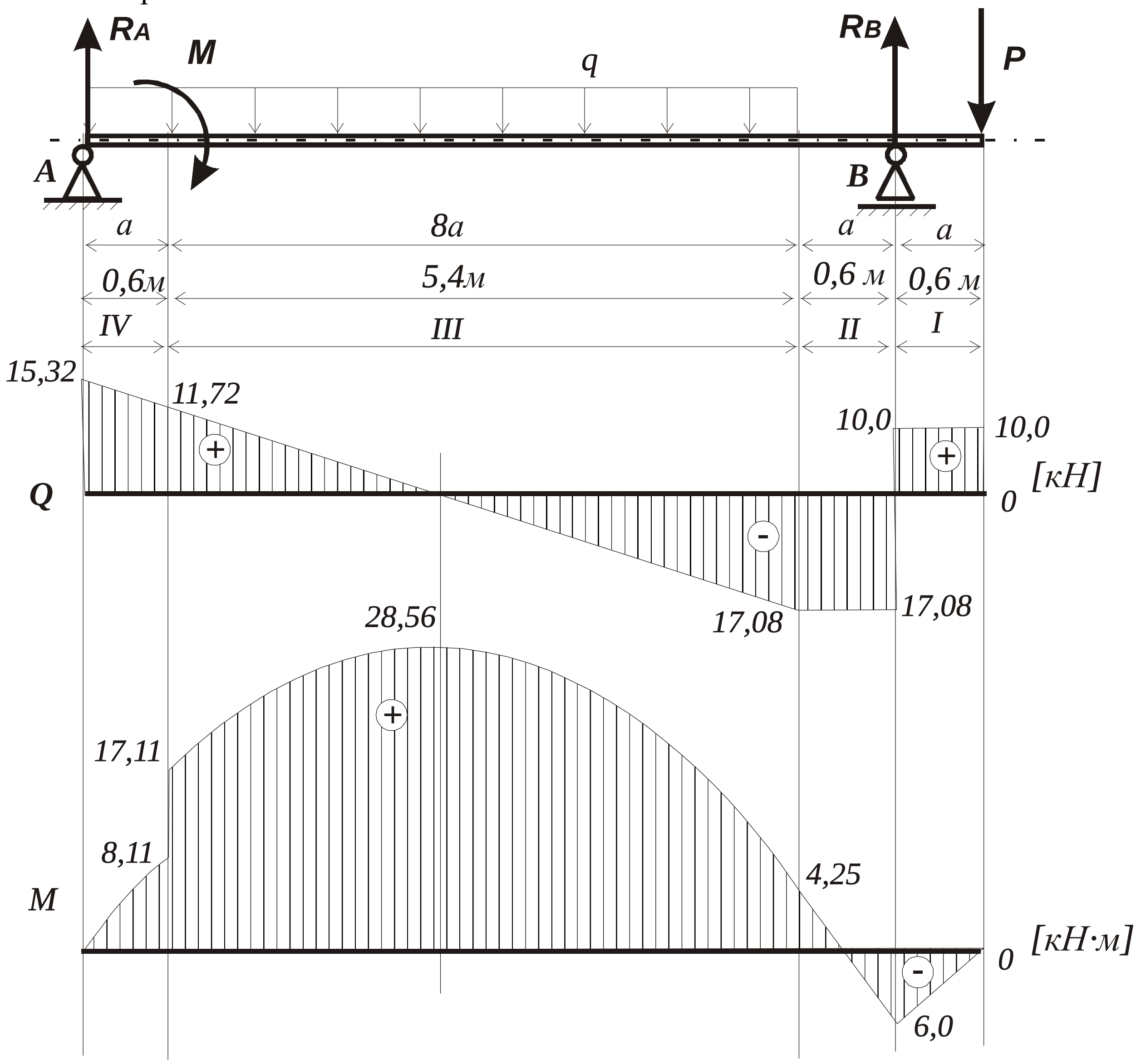
$$Q_3 = R_A - qz = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{R_A}{q} = 4{,}25a = 2{,}55\ м$$

Тогда $\quad M_{3(z=4{,}25a)} = 28{,}56\ кНм$

Опасным является сечение, где момент принимает наибольшее значение, $M_{max} = 28{,}56\ кНм$.

Так как в опасном сечении момент положительный, верхние волокна сжаты, нижние - растянуты.

Условие прочности



$$s_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le [s] = 180\ МПа,$$

$$\Rightarrow \qquad W_x \ge \frac{M_{max}}{[s]} = 158{,}66\ см^3$$

Подбор двутаврового сечения

двутавр № 18а:

W_x=159 см^3, F=25,4 см^2, J_x=1430 см^4, S_x=89,8 см^3, h=180 мм, b=100 мм, s=5,1 мм, t=8,3 мм

$$s_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = 179{,}61\,МПа$$

Балка недогружена на $d\% = \left|\frac{[s] - s_{max}}{[s]}\right| \cdot 100\% = 0{,}21\%$.

Задача №10

Для балки требуется:

1. найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2);
2. построить эпюры Q и M;
3. построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две на консоли.

Исходные данные:

схема VII;
a=0,9; b=0,2.

Решение

Уравнения равновесия для статически неопределимой балки:

$$\begin{cases} -R_A l - M_A - P\cdot 0{,}5l - 0{,}5q(b\,l)^2 = 0 \\ -R_B l + M_A - P\cdot 0{,}5l + q(b\,l)\cdot(0{,}5b\,l + l) = 0 \end{cases}$$

Система один раз статически неопределима: $s = 3 - 2 = 1$.

Раскроем статическую неопределимость, пользуясь методом сил.

В качестве эквивалентной системы выбираем шарнирно опертую статически определимую балку, нагруженную неизвестным моментом X_1 в сечении А на месте отброшенной связи – жесткой заделки. Условие эквивалентности – равенство нулю угла поворота в сечении А - запишем в виде уравнения метода сил для один раз статически неопределимой системы:

$d_{11} X_1 + D_{1P} = 0$. d_{11} - угол поворота сечения *A*, вызванный единичным моментом, приложенным в сечении *A* в направлении X_1 . D_{1P} - угол поворота сечения *A* от действия внешней нагрузки. Определим перемещения сечения *A*, пользуясь методом Верещагина:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ_X}\left(\overline{M}\times\overline{M}\right);$$

$$D_{1P} = \frac{1}{EJ_X}\left(M_P\times\overline{M} + M_q\times\overline{M}\right).$$

Умножим эпюру от действия единичного момента $\overline{M}$ саму на себя:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ_X}\left(\overline{M}\times\overline{M}\right) = \frac{1}{EJ_X}\left(W_0\overline{M}_0\right) = \frac{0{,}33l}{EJ_X}$$

$$W_0 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot l = 0{,}5l;\quad \overline{M}_0 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Умножим эпюры изгибающих моментов от действия внешних нагрузок на эпюру $\overline{M}$:

$$D_{1P} = \frac{1}{EJ_X}\left(M_P \times \overline{M} + M_q \times \overline{M}\right) = \frac{1}{EJ_X}\left(W_1 \times \overline{M}_1 + W_2 \times \overline{M}_2\right) = \frac{-0{,}05958\,ql^3}{EJ_X}$$

$$W_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{4}\cdot l = -0{,}125\,Pl^2; \qquad \overline{M}_1 = \frac{1}{2}$$

$$W_2 = -\frac{1}{2}\cdot\left(0{,}5\,q\left(b\,l\right)^2\right)\cdot l = -0{,}01ql^3; \qquad \overline{M}_2 = \frac{1}{3}$$

$$X_1 = -\frac{D_{1P}}{d_{11}} = 0{,}17875ql^2, \qquad M_A = 0{,}17875ql^2$$

Из уравнений равновесия находим значения реакций:

$$R_A = -0{,}64875\ ql, \qquad R_B = -0{,}05125\ ql\ .$$

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \le z \le 0{,}5l$ (слева)

$$Q_1 = R_A$$

$$M_1 = R_A z + M_A$$

Тогда на границах участка

$$Q_{1(z=0)} = -0{,}6488\ ql \qquad Q_{1(z=0{,}5l)} = -0{,}6488\,ql$$

$$M_{1(z=0)} = 0{,}1788\ ql^2 \qquad M_{1(z=0{,}5l)} = -0{,}1456\ ql^2$$

II участок: $0{,}5l \le z \le l$ (слева)

$$Q_2 = R_A + P$$

$$M_2 = R_A z + M_A + P(z - 0{,}5l)$$

Тогда на границах участка

$$Q_{2(z=0{,}5l)} = 0{,}2513\,ql \qquad Q_{2(z=l)} = 0{,}2513\,ql$$

$$M_{2(z=0{,}5l)} = -0{,}1456\ ql^2 \qquad M_{2(z=l)} = -0{,}02\,ql^2$$

III участок: $0 \le z \le b\,l$ (справа)

$$Q_3 = qz$$

$$M_3 = -0{,}5qz^2$$

Тогда на границах участка

$$Q_{3(z=0)} = 0 \qquad Q_{3(z=b\,l)} = 0{,}2ql$$

$$M_{3(z=0)} = 0 \qquad M_{3(z=b\,l)} = -0{,}02\ ql^2$$

Выполним деформационную проверку – убедимся, что угол поворота в сечении A равен нулю. Перемещение определяем, перемножая эпюру изгибающего момента M для статически неопределимой балки и эпюру от действия единичного момента $\overline{M}$, пользуясь формулами для перемножения прямолинейных трапеций

$$\left(\overline{M} \times M_{изг}\right) = \frac{l}{6}\left(2ac + 2bd + ad + bc\right).$$

$$q_A = \frac{1}{EJ_X}\left(M \times \overline{M}\right) = \frac{1}{EJ_X}\left(\frac{0{,}5l}{6}\left(2a_1c_1 + 2b_1d_1 + a_1d_1 + b_1c_1\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{0{,}5l}{6}\left(2a_2c_2 + 2b_2d_2 + a_2d_2 + b_2c_2\right)\right) = \frac{0{,}012969 - 0{,}012969}{EJ_X} ql^3 = 0$$

где $c_1 = 1;\ d_1 = 0{,}5;\ c_2 = 0{,}5;\ d_2 = 0;$

$a_1 = 0{,}1788ql^2;\quad b_1 = -0{,}1456ql^2;$

$a_2 = -0{,}1456ql^2;\quad b_2 = -0{,}02ql^2$

Определим прогибы поперечных сечений балки методом начальных параметров:

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x q_0 z + M_A\frac{z^2}{2} + R_A\frac{z^3}{6} + P\left.\frac{(z-0{,}5l)^3}{6}\right|_{z>0{,}5l} + R_B\left.\frac{(z-l)^3}{6}\right|_{z>l} -$$

$$-q\left.\frac{(z-l)^4}{24}\right|_{z>l},$$

причем $y_0 = 0,\qquad q_0 = 0.$

Тогда прогибы в сечениях балки (ось z слева направо):

$y_{A(z=0)} = 0;$

$$y_{(z=0{,}25l)} = \frac{0{,}0039ql^4}{EJ_x};$$

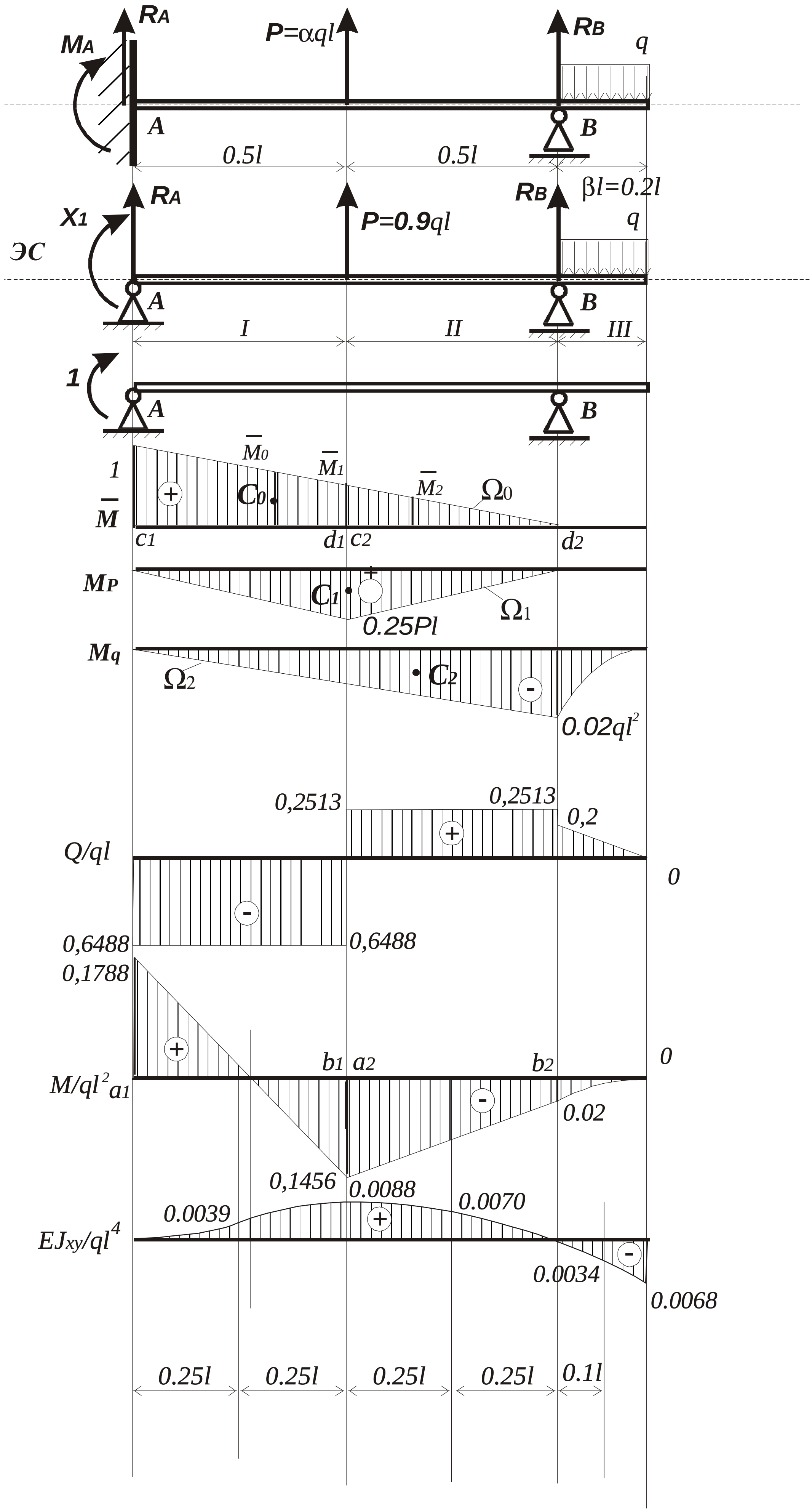
$$y_{(z=0{,}5l)} = \frac{0{,}0088ql^4}{EJ_x};$$

$$y_{(z=0{,}75l)} = \frac{0{,}0070ql^4}{EJ_x};$$

$y_{B(z=l)} = 0;$

$$y_{(z=(1+0{,}5b)l)} = \frac{-0{,}0034ql^4}{EJ_x};$$

$$y_{(z=(1+b)l)} = \frac{-0{,}0068ql^4}{EJ_x}$$


RA
MA
P=αql
RB
q
A
B
0.5l
0.5l
βl=0.2l
RA
X1
P=0.9ql
RB
q
ЭС
A
B
I
II
III
1
A
B
M0
M1
M2
Ω0
1
M
C0
c1
d1
c2
d2
MP
C1
Ω1
0.25Pl
Mq
Ω2
C2
0.02ql2
0,2513
0,2513
0,2
Q/ql
0
0,6488
0,6488
0,1788
0
b1
a2
b2
M/ql2
a1
0.02
0,1456
0.0088
0.0039
0.0070
EJxy/ql4
0.0034
0.0068
0.25l
0.25l
0.25l
0.25l
0.1l

Задача №6

Жесткий брус прикреплен к шарнирно-неподвижной опоре и к двум пружинам с одинаковым средним диаметром витков D и с одинаковым диаметром проволоки d. Пружина 1 имеет m витков, пружина 2 – n витков. Требуется:

1. найти усилия и напряжения в обеих пружинах;
2. найти осадки обеих пружин;
3. установить при каком отношении m/n усилия в обеих пружинах равны между собой;
4. найти усилия, напряжения и осадки при найденном отношении m/n и заданной величине m (или n).

Исходные данные:

схема VI

D=13 см; d=1,3 см; m=13; n=6; P=60 Н, G=8 10^4 МПа.

Решение

1. Уравнения равновесия для статически неопределимой системы:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0 & \Rightarrow \quad X_A = 0 \\ \sum Y_i = 0 & \Rightarrow \quad Y_A + N_1 - N_2 - P = 0 \\ \sum M_A^i = 0 & \Rightarrow \quad N_1 a + N_2 a - P a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad N_1 + N_2 - P = 0 \qquad (1)$$

Система один раз статически неопределима: $s = 4 - 3 = 1$.

Рассмотрим схему деформации системы.

$$D_{ABB_1} \sim D_{ACC_1} \Rightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}$$

$$CC_1 = l_2; \qquad BB_1 = l_1;$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a} = \frac{l_1}{l_2},$$

уравнение совместности деформаций:

$$l_1 = l_2$$

Продольные деформации винтовых пружин или их осадки равны:

$$l_1 = \frac{8N_1 D^3 m}{G d^4};$$

$$l_2 = \frac{8N_2 D^3 n}{G d^4}.$$

Из уравнения совместности деформаций получим

$$N_1 m = N_2 n \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{n}{m} N_2 . \qquad (2)$$

Разрешая систему уравнений *(1),(2)* находим усилия в стержнях системы:

$$N_1 = \frac{Pn}{m+n} = 18{,}95\ Н$$

$$N_2 = \frac{Pm}{m+n} = 41{,}05\ Н$$

Максимальные напряжения в сечениях проволоки пружин

$$t_1 = k\frac{8N_1D}{pd^3} = 3{,}25\ МПа$$

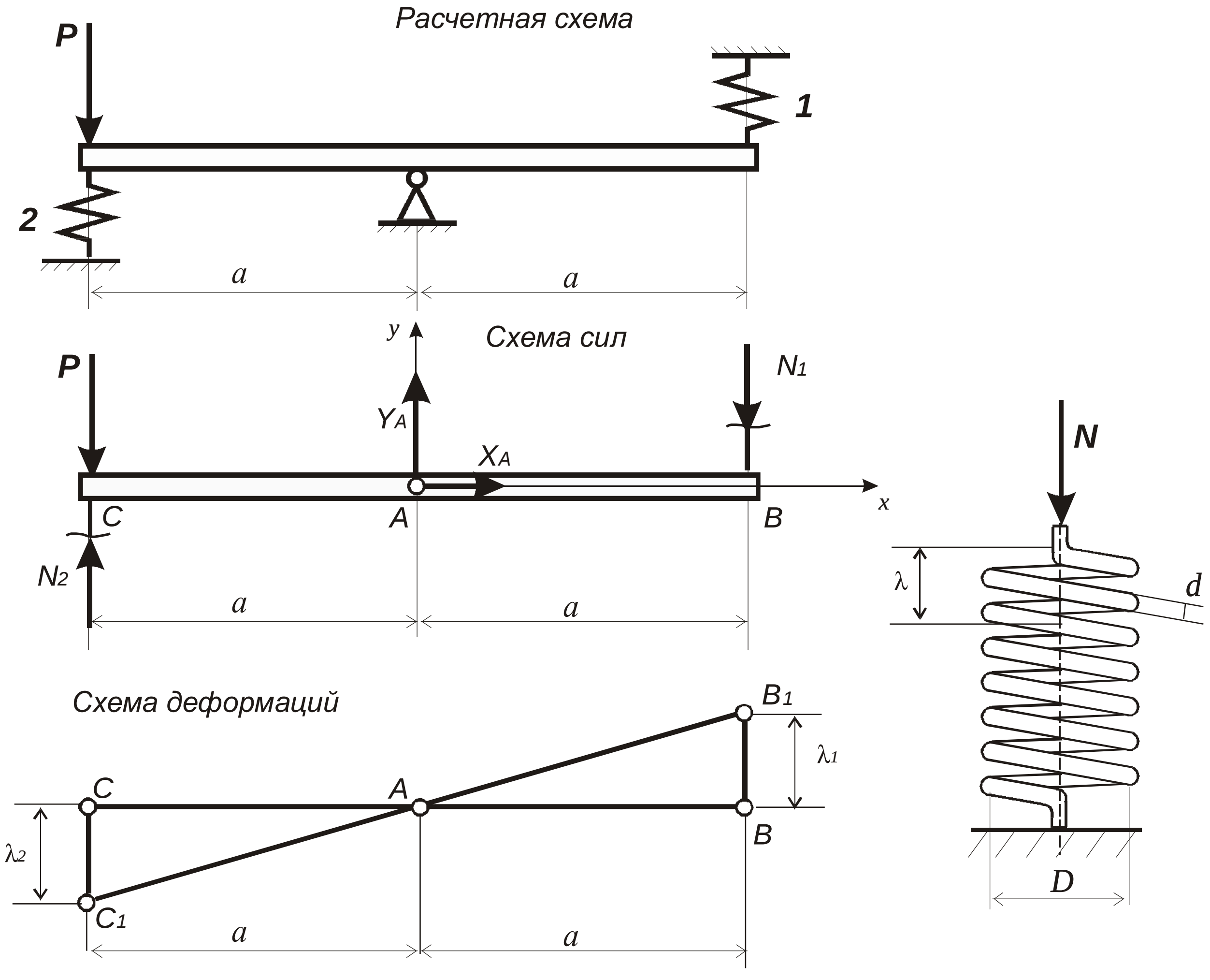
$$t_2 = k\frac{8N_2D}{pd^3} = 7{,}04\ МПа$$

$$k = \frac{\frac{D}{d} + 0{,}25}{\frac{D}{d} - 1} = 1{,}139 \text{ - поправочный коэффициент}$$

Осадки пружин

$$l_1 = \frac{8N_1D^3m}{Gd^4} = 0{,}189\ см$$

$$l_2 = \frac{8N_2D^3n}{Gd^4} = 0{,}189\ см$$



Установим, при каком отношении витков *m/n* усилия в пружинах равны между собой

пусть $\quad N_1 = N_2 = N \quad \Rightarrow$

$$2N - P = 0 \qquad (1')$$

$$Nm - Nn = 0 \qquad (2')$$

Следовательно, при

$n = 6, \qquad m = n = 6,$

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2} = 30\ H$$

$$t_1 = t_2 = k\frac{8PD}{3pd^3} = 5{,}15\ МПа$$

$$l_1 = l_2 = \frac{8PD^3n}{3Gd^4} = 0{,}138\ см$$

Задача №13

Чугунный короткий стержень сжимается продольной силой *P*, приложенной в точке *A*. Требуется:

1. вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через *P* и размеры сечения;
2. найти допускаемую нагрузку *P* при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие и на растяжение.

Исходные данные:

схема VII;

$a = 3\ см;\ b = 4\ см; [s]_c = 130\ МПа;\ [s]_p = 29\ МПа$.

Решение

Определим положение центра тяжести сечения.

Сечение имеет ось симметрии *Yc*. Ординату центра тяжести определим относительно оси *X*.

Выразим площадь поперечного сечения через параметры *a* и *b*. Сечение разобьем на три части – два треугольника и прямоугольник с центрами тяжести в точках C_1, C_2, C_3:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot 2b + b\cdot 2b + \frac{1}{2}\cdot a\cdot 2b = 2ab + 2b^2 = 56\ см^2.$$

Статический момент площади сечения относительно оси *X*:

$$S_X = S_1 + S_2 + S_3 = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3 = ab\cdot\frac{2b}{3} + 2b^2\cdot b + ab\cdot\frac{2b}{3} = \frac{4}{3}ab^2 + 2b^3 = 192\ см^3$$

Ордината центра тяжести *C* может быть определена по формуле

$$y_C = \frac{S_X}{F} = \frac{b\left(\frac{2}{3}a + b\right)}{(a+b)} = 3{,}43\ см.$$

Главные центральные оси инерции сечения - оси *Xc, Yc*

Вычислим главные центральные моменты инерции сечения.

Главный центральный момент инерции сечения равен сумме моментов инерции частей сечения (m_i, n_i – расстояния между центральными осями частей и центральной осью сечения)

$$J_X = J^1_{X_1} + m_1^2F_1 + J^2_{X_2} + m_2^2F_2 + J^2_{X_3} + m_3^2F_3 =$$

$$= \frac{a(2b)^3}{36} + m_1{}^2\cdot ab + \frac{b\cdot(2b)^3}{12} + m_2{}^2\cdot 2b^2 + \frac{a(2b)^3}{36} + m_3{}^2\cdot ab = 280{,}38\ см^4$$

$$J_Y = J^1_{Y_1} + n_1^2F_1 + J^2_{Y_2} + n_2^2F_2 + J^3_{Y_3} + n_3^2F_3 =$$

$$= \frac{2b \cdot a^3}{36} + n_1^{\,2} \cdot ab + \frac{2b \cdot b^3}{12} + n_2^{\,2} \cdot 2b^2 + \frac{2b \cdot a^3}{36} + n_3^{\,2} \cdot ab = 270{,}67 \text{ см}^4$$

$$m_1 = y_C - y_1 = y_C - \frac{2b}{3} = 0{,}76 \text{ см}$$

$$m_2 = y_2 - y_C = b - y_C = 0{,}57 \text{ см}$$

$$m_3 = y_C - y_3 = y_C - \frac{2b}{3} = 0{,}76 \text{ см}$$

$$n_1 = \frac{b}{2} + \frac{a}{3} = 3 \text{ см}$$

$$n_2 = 0$$

$$n_3 = \frac{b}{2} + \frac{a}{3} = 3 \text{ см}$$

Квадраты главных радиусов инерции

$$i_X^2 = \frac{J_{Xc}}{F} = 5{,}01 \text{ см}^2 \qquad\qquad i_Y^2 = \frac{J_{Yc}}{F} = 4{,}83 \text{ см}^2$$

Определим положение нулевой линии сечения.

Координаты точки приложения силы P

$$x_P = x_A = 0 \qquad\qquad y_P = y_A = -y_C = -3{,}43 \text{ см}$$

Нулевая линия параллельна оси Xc. Отрезок, отсекаемый нулевой линией на главной центральной оси инерции сечения Yc,

$$y_n = -\frac{i_x^2}{y_P} = 1{,}25 \text{ см}$$

Наибольшие по величине напряжения сжатия будут на нижней границе сечения $(y=-y_C)$, наибольшие по величине напряжения растяжения будут на верхней границе сечения $(y=2b-y_C)$.

$$s = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{x_P x}{i_Y^2} + \frac{y_P y}{i_X^2}\right).$$

Тогда наибольшие сжимающие напряжения равны

$$s_{max}^{c} = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_P \cdot (-y_C)}{i_X^2}\right) = -749{,}22P \text{ 1/м}^2$$

Тогда наибольшие растягивающие напряжения равны

$$s_{max}^{p} = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_P \cdot (2b - y_C)}{i_X^2}\right) = 392{,}08P \text{ 1/м}^2$$

Определим допускаемую нагрузку.

Условие прочности на сжатие:

$$s_{max}^{c} \le [s]_c = 130 \text{ МПа}$$

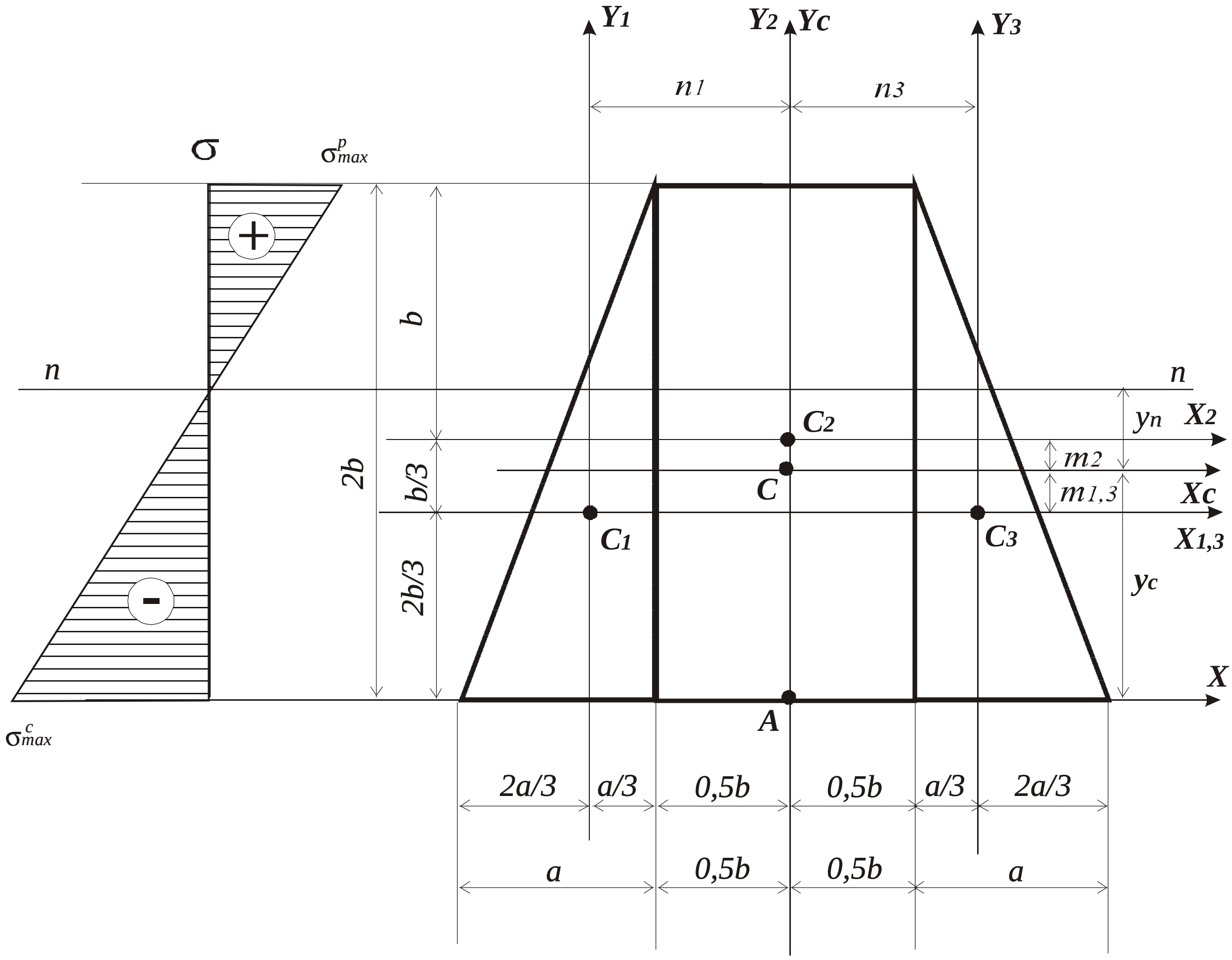
Условие прочности на растяжение:

$$s_{max}^{p} \le [s]_p = 29 \text{ МПа}$$

Тогда

$$[P]_c \le 173{,}51 \text{ кН} \qquad\qquad [P]_p \le 73{,}96 \text{ кН}$$

Принимаем $[P] = 73{,}96$ кН



Задача №15

Шкив с диаметром D_1 и углом наклона ветвей ремня к горизонту a_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность N *кВт*. Два других шкива имеют диаметры D_2 и углы наклона ветвей ремня к горизонту a_2 и каждый из них передает мощность $N/2$. Требуется:

1. определить моменты приложенные к шкивам;
2. построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$;
3. определить окружные усилия t_1 и t_2, действующие на шкивы;
4. определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
5. определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях;
6. построить эпюры изгибающих моментов от вертикальных и горизонтальных сил;
7. построить эпюру суммарных изгибающих моментов;
8. найти опасное сечение и определить по третьей теории прочности максимальный расчетный момент;
9. подобрать диаметр вала d при $[s]=70$ *МПа* и округлить его значение до ближайшего, равного: *30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 100 мм*

Исходные данные:

схема VIII;

$N=90$ *кВт*; $n=800$ *об/мин*; $a=1{,}3$ *м*; $b=1{,}9$ *м*; $c=1{,}8$ *м*; $D_1=0{,}9$ *м*; $D_2=0{,}8$ *м*; $a_1=90°$; $a_2=80°$.

Решение

1.Определение моментов, приложенных к шкивам.
Момент, передаваемый передачей 1:

$$M_1 = \frac{30N}{p\ n} = 1074{,}30\ Н\,м.$$

Моменты, передаваемые передачами 2 и 3:

$$M_2 = \frac{30 \cdot 0{,}5N}{p\ n} = 537{,}15\ Н\,м.$$

2.Построение эпюры крутящих моментов $M_к$.
1 участок: $M_{к1}=0,$
2 участок: $M_{к2}=M_1=1074{,}30\ Н\,м,$
3 участок: $M_{к3}= M_1-M_2=537{,}15\ Н\,м.$
3.Усилия, действующие на шкивы.
Окружное усилие передачи 1:

$$t_1 = \frac{2M_1}{D_1} = 2387{,}32\ Н,$$

Окружное усилие передач 2 и 3:

$$t_2 = \frac{2M_2}{D_2} = 1342{,}87\ Н,$$

4.Давления на вал.

$$3t_1 = 7161{,}97\ Н,$$

$$3t_2 = 4028{,}61\ Н.$$

5.Силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях.
Вертикальная и горизонтальная составляющие усилий, действующих на вал со стороны первой передачи:

$$P_{1y} = 3t_1 \sin a_1 = 7161{,}97\ Н,$$

$$P_{1x} = 3t_1 \cos a_1 = 0,$$

Вертикальная и горизонтальная составляющие усилий, действующих на вал со стороны второй и третьей передач:

$$P_{2y} = 3t_2 \sin a_2 = 3967{,}41\ Н,$$

$$P_{2x} = 3t_2 \cos a_2 = 699{,}56\ Н,$$

6.Построение эпюр изгибающих моментов от вертикальных и горизонтальных сил.
Построение эпюры изгибающего момента M_x:

$$\begin{cases} S\ m_B\left(P_{iy}\right) = 0, \\ S\ m_A\left(P_{iy}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_A\left(b+c\right) - P_{1y}\left(c\right) + P_{2y}\left(0{,}5a\right) + P_{2y}\left(a\right) = 0, \\ Y_B\left(b+c\right) - P_{1y}\left(b\right) - P_{2y}\left(b+c+0{,}5a\right) - P_{2y}\left(b+c+a\right) = 0 \end{cases}$$

$$Y_A = 1393{,}27\ Н,$$

$$Y_B = 13703{,}51\ Н.$$

Проверка:

$$S\ P_{iy} = 0 \Rightarrow -P_{1y} - 2P_{2y} + Y_A + Y_B = 0$$

Величины изгибающего момента M_x в характерных сечениях:
$M_{x1}=0,$

$M_{x2}=M_{x3}=Y_A(b)=2647{,}22$ *Н м*,
$M_{x4}=M_{x5}=Y_A(b+c)-P_{1y}(c)=-7736{,}44$ *Н м*,
$M_{x6}=M_{x7}=-P_{2y}(0{,}5a)=-2578{,}81$ *Н м*,
$M_{x8}=0.$

Построение эпюры изгибающего момента M_y:

$$\begin{cases} S\ m_B(P_{ix})=0, \\ S\ m_A(P_{ix})=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A(b+c)+P_{1x}(c)+P_{2x}(0{,}5a)+P_{2x}(a)=0, \\ X_B(b+c)+P_{1x}(b)-P_{2x}(b+c+0{,}5a)-P_{2x}(b+c+a)=0 \end{cases}$$

$X_A=-368{,}69$ *Н*,
$X_B=1767{,}81$ *Н*.

Проверка:
$S\ P_{ix}=0 \Rightarrow P_{1x}-2P_{2x}+X_A+X_B=0$
Значения изгибающего момента M_y в характерных сечениях:
$M_{y1}=0,$
$M_{y2}=M_{y3}=X_A(b)=-700{,}51$ *Н м*,
$M_{y4}=M_{y5}=P_{1x}(c)+X_A(b+c)=-1364{,}14$ *Н м*,
$M_{y6}=M_{y7}=-P_{2x}(0{,}5a)=-454{,}71$ *Н м*,
$M_{y8}=0.$

Построение эпюры суммарного изгибающего момента.

$M_{сум}=\sqrt{M_x^2+M_y^2}$

$M^1_{сум}=0,$

$M^2_{сум}=M^3_{сум}=2738{,}33$ *Н м*,

$M^4_{сум}=M^5_{сум}=7855{,}79$ *Н м*,

$M^6_{сум}=M^7_{сум}=2618{,}60$ *Н м*,

$M^8_{сум}=0.$

Построение эпюры приведенных моментов.

$M_{пр}=\sqrt{M^2_{сум}+M^2_{к}}$

$M^1_{пр}=0,$

$M^2_{пр}=2738{,}33$ *Н м*,

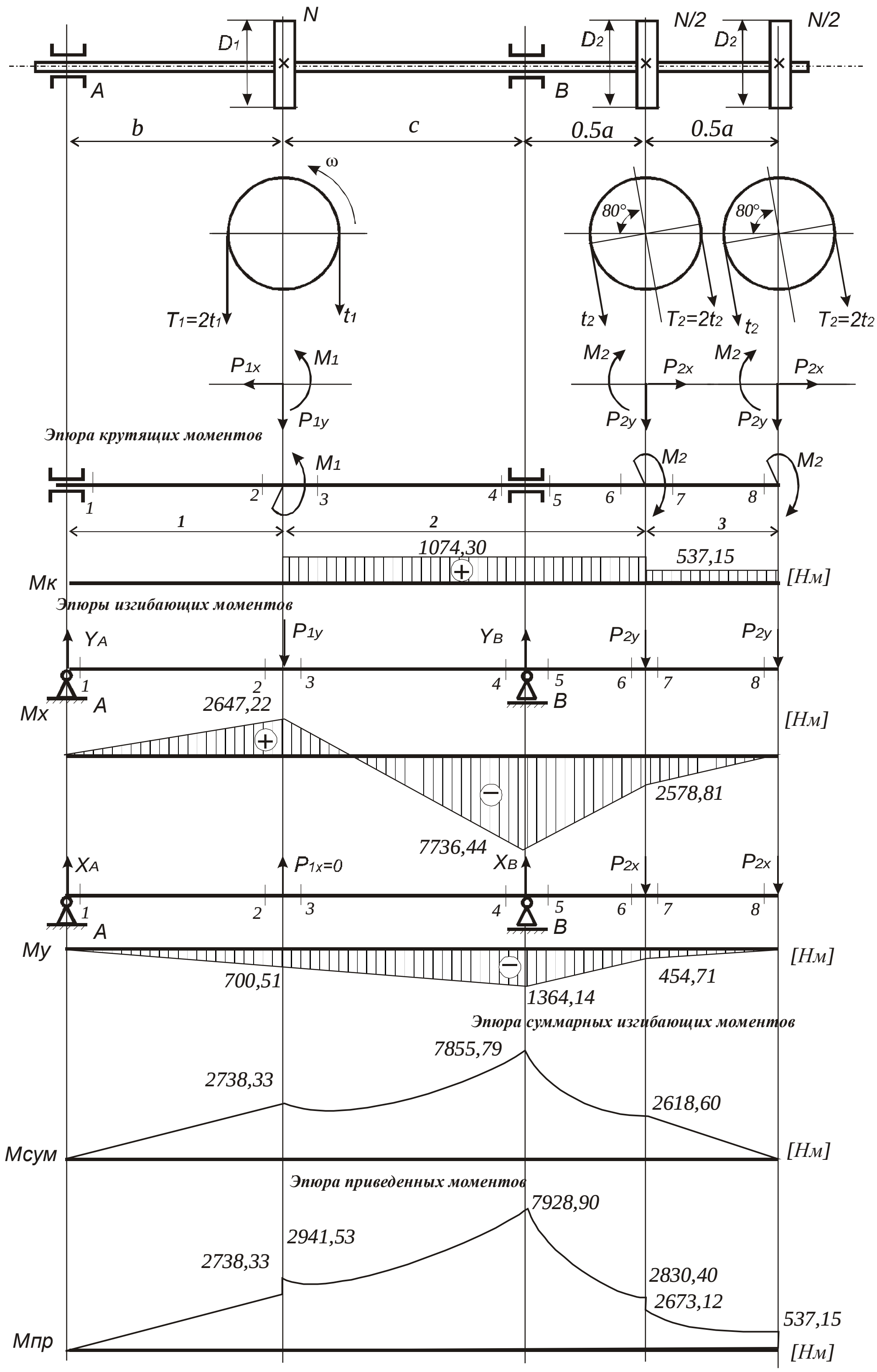
$M^3_{пр}=2941{,}53$ *Н м*,

$M^4_{пр}=M^5_{пр}=7929{,}90$ *Н м*,

$M^6_{пр}=2830{,}40$ *Н м*,

$M^7_{пр}=2673{,}12$ *Н м*,

$M^8_{пр}=537{,}15$ *Н м*.



Определение диаметра вала.

Опасным является сечение, где приведенный момент достигает максимального значения.

Условие прочности вала при использовании теории наибольших касательных напряжений (третьей теории прочности) имеет вид:

$$s_{пр} = \frac{M_{пр}^{\max}}{W_x} \le [s\,] = 70\ МПа,$$

$$где\ W_x = \frac{p\,d^3}{32} \approx 0{,}1 d^3$$

тогда диаметр вала в опасном сечении $$d \ge \sqrt[3]{\frac{M_{пр}^{\max}}{0{,}1[s\,]}} = \sqrt[3]{\frac{M_{пр}^{4}}{0{,}1[s\,]}} = 0{,}1049\ м.$$

Принимаем диаметр равным:

$d =$ *110 мм.*

Задача №22

В опасном сечении вала с диаметром d действует крутящий момент $M_{кр}$ и изгибающий момент $M_{изг}$. Вал сделан из углеродистой стали (предел прочности которой равен $s_в$, а предел текучести $s_т$) и не имеет резких переходов, выточек, канавок; поверхность его чисто обработана резцом.

Определить коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала, приняв нормальные напряжения изгиба изменяющимися по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения - по пульсирующему циклу.

Коэффициенты концентрации напряжений и масштабные коэффициенты можно считать соответственно одинаковыми для нормальных и касательных напряжений.

Исходные данные:

d=40 мм; $M_{кр}$=290 Н·м; $M_{изг}$=300 Н·м; $s_в$=590 МПа; $s_т$=280 МПа .

Решение

Моменты сопротивления опасного сечения:

при изгибе

$$W_x = \frac{p\,d^3}{32} = 6{,}283\ 10^{-6}\ м^3$$

при кручении

$$W_p = \frac{p\,d^3}{16} = 12{,}566\ 10^{-6}\ м^3$$

Максимальные напряжения:

при изгибе

$$s_{\max} = \frac{M_{изг}}{W_x} = 47{,}75\ 10^6\ Па = 47{,}75\ МПа;$$

при кручении

$$t_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = 23{,}08\ 10^6\ Па = 23{,}08\ МПа.$$

Параметры циклов изменения нормальных и касательных напряжений:

для симметричного цикла

$s_a = s_{\max} = 47{,}75\ МПа;$ $\qquad\qquad$ $s_m = 0\ ;$

для пульсирующего цикла

$t_a = t_m = 0{,}5 t_{\max} = 11{,}54\ МПа.$

Пределы выносливости материала:

$s_{-1} = (0{,}55 - 0{,}0001 \cdot s_B) \cdot s_B = 289{,}69\ МПа;$

$t_{-1} = 0{,}6 \cdot s_{-1} = 173{,}81\ МПа;$

Коэффициенты, характеризующие чувствительность материала к асимметрии цикла:

$y_s = 0{,}02 + 0{,}0002 \cdot s_B = 0{,}138;$

$y_t = 0{,}5 \cdot y_s = 0{,}069;$

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений при изгибе и кручении:

$$K_s = K_t = 1{,}2 + 0{,}2\frac{s_B - 40}{110} = 2{,}20;$$

Масштабные коэффициенты:

$K_{ds} = K_{dt} = 1{,}2 + 0{,}1(d - 3) = 1{,}30;$ $\qquad$ здесь d=4,0 *см*

Коэффициенты чистоты обработки по условию задачи равны:

$K_{Fs} = K_{Ft} = 1.$

Коэффициент упрочнения из условия задачи равен:

$K_v = 1.$

Коэффициенты снижения предела выносливости детали при изгибе и кручении:

$$K_{sД} = K_{tД} = \left(\frac{K_s}{K_{ds}} + \frac{1}{K_{Fs}} - 1\right) \cdot \frac{1}{K_v} = 1{,}692;$$

Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям:

$$n_s = \frac{s_{-1}}{K_{sД} s_a + y_s s_m} = 3{,}585;$$

Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям:

$$n_t = \frac{t_{-1}}{K_{tД} t_a + y_t t_m} = 8{,}552;$$

Общий коэффициент запаса прочности при действии нормальных и касательных напряжений

$$n = \frac{n_s n_t}{\sqrt{n_s^2 + n_t^2}} = 3{,}306.$$