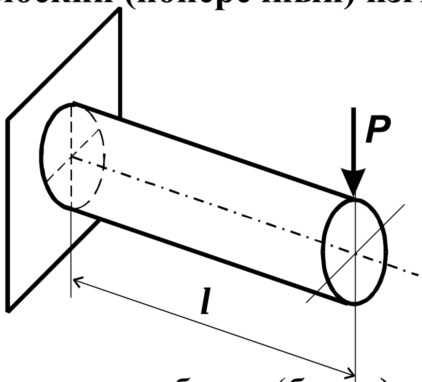
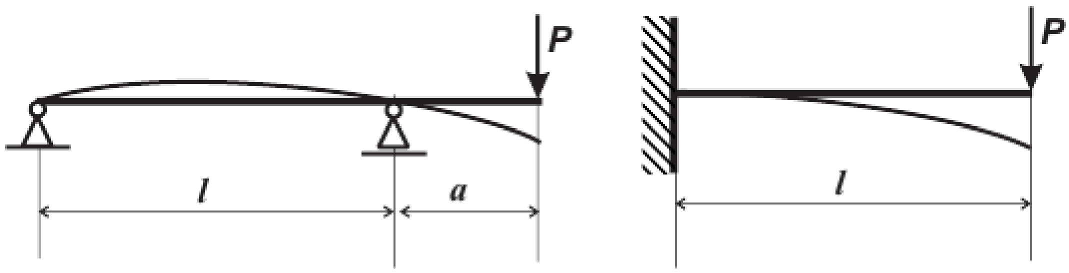
Плоский (поперечный) изгиб

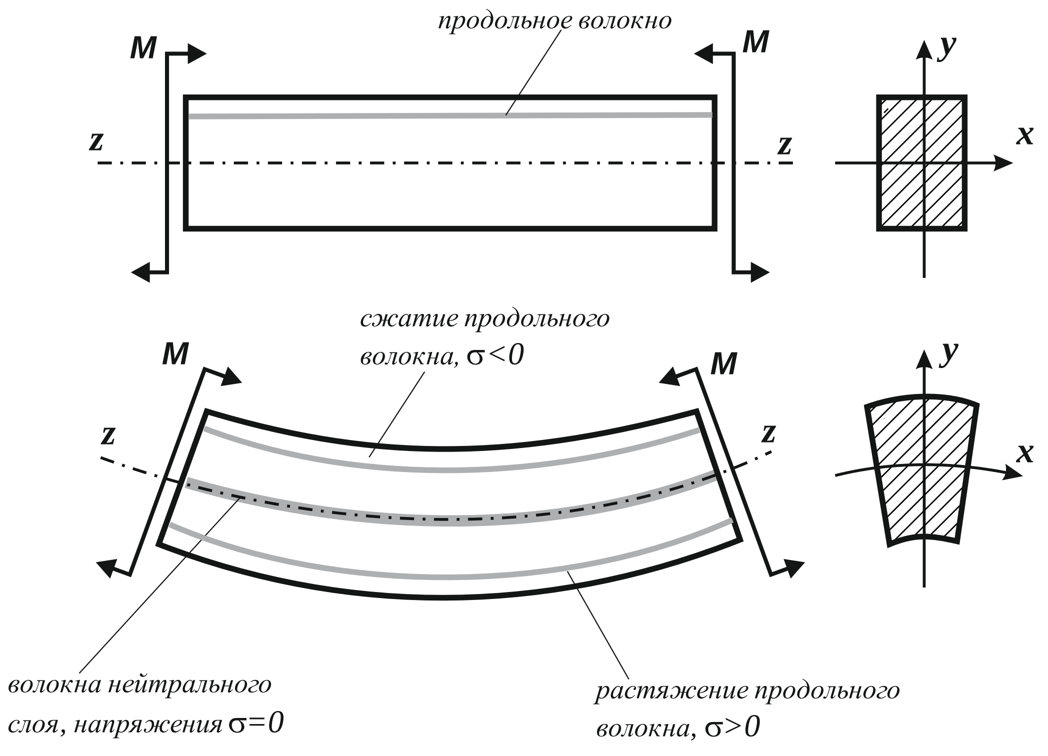


При плоском изгибе продольная ось бруса (балки) деформируется в плоскости действия внешней нагрузки.



Все внешние нагрузки перпендикулярны продольной оси бруса (балки) и лежат в одной из главных плоскостей инерции бруса. Для балок с симметричным поперечным сечением главные плоскости инерции совпадают с плоскостями продольной симметрии балки. В поперечных сечениях балки возникают внутренние силовые факторы – поперечная сила Q и изгибающий момент M .

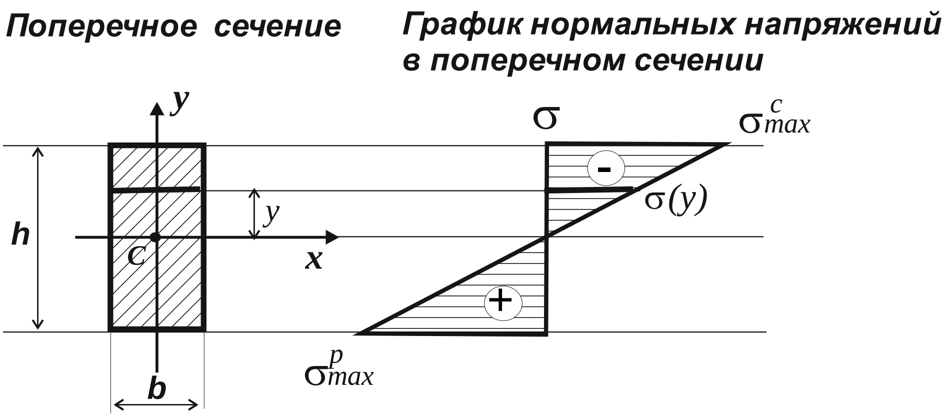
Характер деформации бруса при изгибе



z-z - *продольная ось*
x, **y** - *центральные оси поперечного сечения*

Напряжения при изгибе

В поперечных сечениях возникают нормальные напряжения σ. Нормальные напряжения по высоте поперечного сечения балки изменяются по линейному закону. На верхней и нижней границе сечения напряжения максимальны (**правило знаков** – при растяжении продольных волокон балки напряжения положительны, при сжатии – отрицательны). Ось x, проходящая через центр тяжести сечения C – нейтральная ось сечения, на ней напряжения равны нулю.



ось ***x*** *- нейтральная ось сечения*

(•) *C* *- центр тяжести сечения*

Связь напряжений с изгибающим моментом:

$$\boxed{\sigma(y) = \frac{M}{J_x} \cdot y}$$

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M}{W_x}}$$

<u>Геометрические характеристики сечений, используемые в расчетах на изгиб</u>

Осевые моменты инерции сечения *(м⁴)*:

$$\boxed{J_x = \int_F y^2 dF, \qquad J_y = \int_F x^2 dF}$$

F – площадь сечения.

Осевые моменты сопротивления сечения *($м^3$)*:

$$\boxed{W_x = \frac{J_x}{y_{max}}, \qquad W_y = \frac{J_y}{x_{max}},}$$

x_{max}, y_{max} - наибольшие расстояния от нейтральной оси до границы сечения.

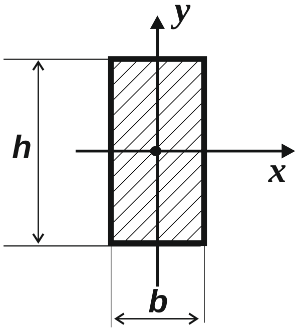
J_x, W_x - используются в расчетах, если изгиб происходит в вертикальной плоскости yz, нейтральная ось сечения - ось x.

J_y, W_y - используются в расчетах, если изгиб происходит в горизонтальной плоскости xz, нейтральная ось сечения - ось y.

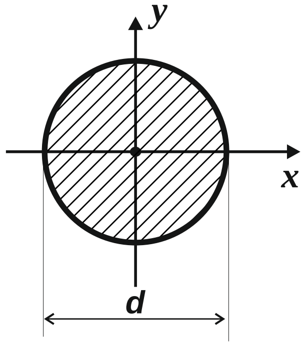
<u>Геометрические характеристики сечений простой геометрической формы</u>

Поперечные сечения простой геометрической формы

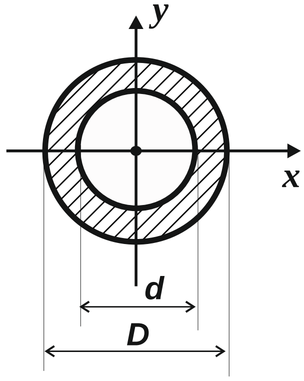
Прямоугольное сечение



Круглое сечение



Кольцевое (трубчатое) сечение



Прямоугольное сечение

Осевой момент инерции сечения:

$$\boxed{J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12},} \quad (м^4).$$

Осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{J_x}{0{,}5h}; \qquad W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{J_y}{0{,}5b}$$

$$\boxed{W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6},} \quad (м^3).$$

Круглое сечение

Осевой момент инерции сечения:

$$\boxed{J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0{,}05 d^4,} \quad (м^4).$$

Осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{J_x}{0{,}5d}; \qquad W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{J_y}{0{,}5d}$$

$$\boxed{W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1d^3,} \quad (м^3).$$

Кольцевое сечение

Осевой момент инерции сечения:

$$\boxed{J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) \approx 0{,}05\,D^4\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right),} \quad (м^4).$$

Осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{J_x}{0{,}5D}; \qquad W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{J_y}{0{,}5D}$$

$$\boxed{W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) \approx 0{,}1D^3\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right),} \quad (м^3).$$

Условие прочности при изгибе

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \le [\sigma]}$$

$[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

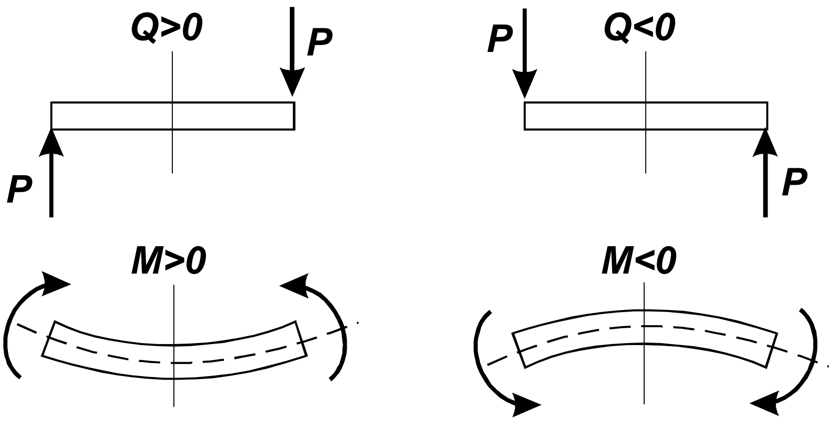
При проектировочном расчете из условия прочности может быть определен осевой момент сопротивления сечения, а затем подобраны характерные размеры сечения и определена его площадь:

$$W_x \ge \frac{|M_{max}|}{[\sigma]}$$

Построение эпюр внутренних силовых факторов при изгибе балок

В поперечных сечениях балки возникают внутренние силовые факторы – поперечная сила *Q (Н, кН)*; изгибающий момент *М (Н ·м, кН ·м)*. Внутренние силовые факторы определяются методом сечений

Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов:

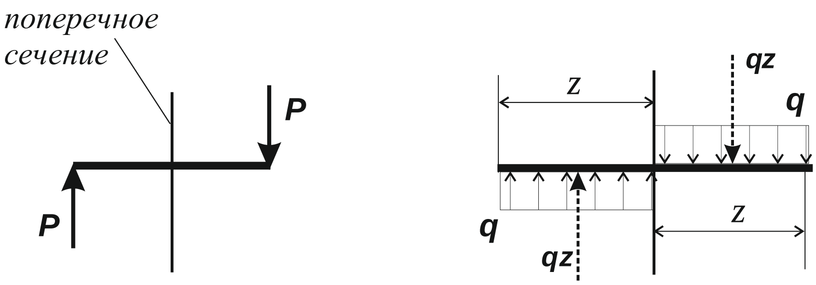


Поперечная сила в сечении положительна, если внешние нагрузки вращают отсеченную часть балки по часовой стрелке.
Поперечная сила в сечении отрицательна, если внешние нагрузки вращают отсеченную часть балки против часовой стрелке

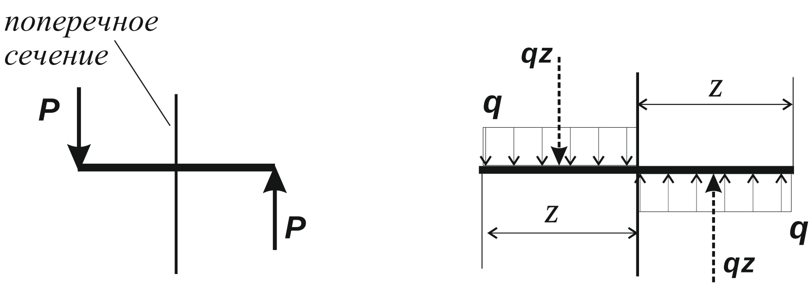
Изгибающий момент в сечении положителен, если внешние нагрузки стремятся сжать верхние волокна балки.
Изгибающий момент в сечении отрицателен, если внешние нагрузки стремятся сжать нижние волокна балки

Расшифровка правила знаков!

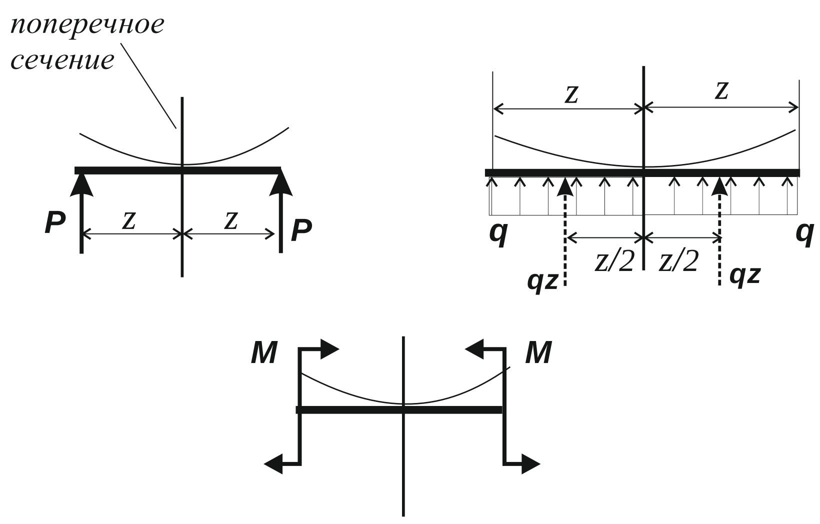
Внешние нагрузки, создающие положительные поперечные силыQ



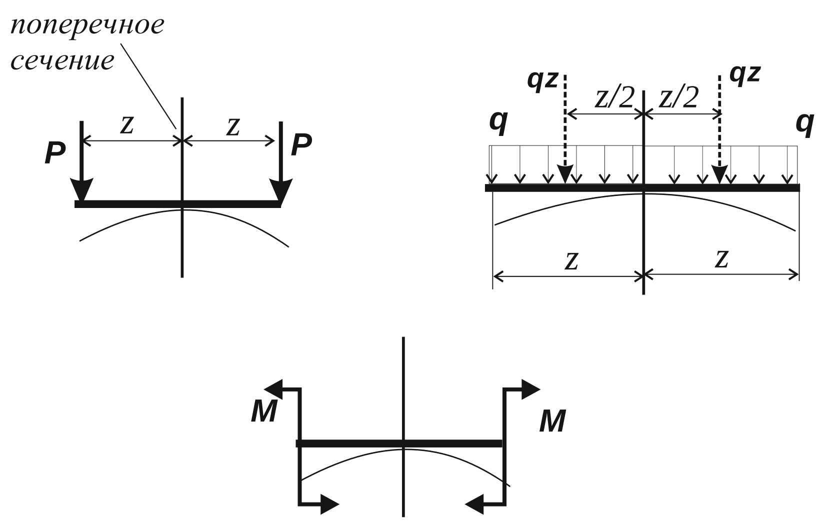
Внешние нагрузки, создающие отрицательные поперечные силыQ



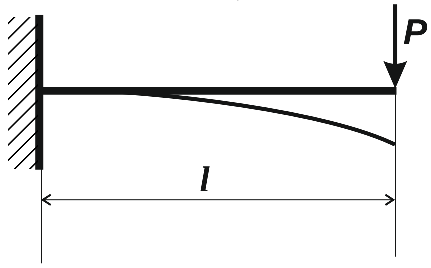
Внешние нагрузки, создающие положительные изгибающие моменты М



Внешние нагрузки, создающие отрицательные изгибающие моменты М



Задача 1. Консольная балка (балка с жесткой заделкой):

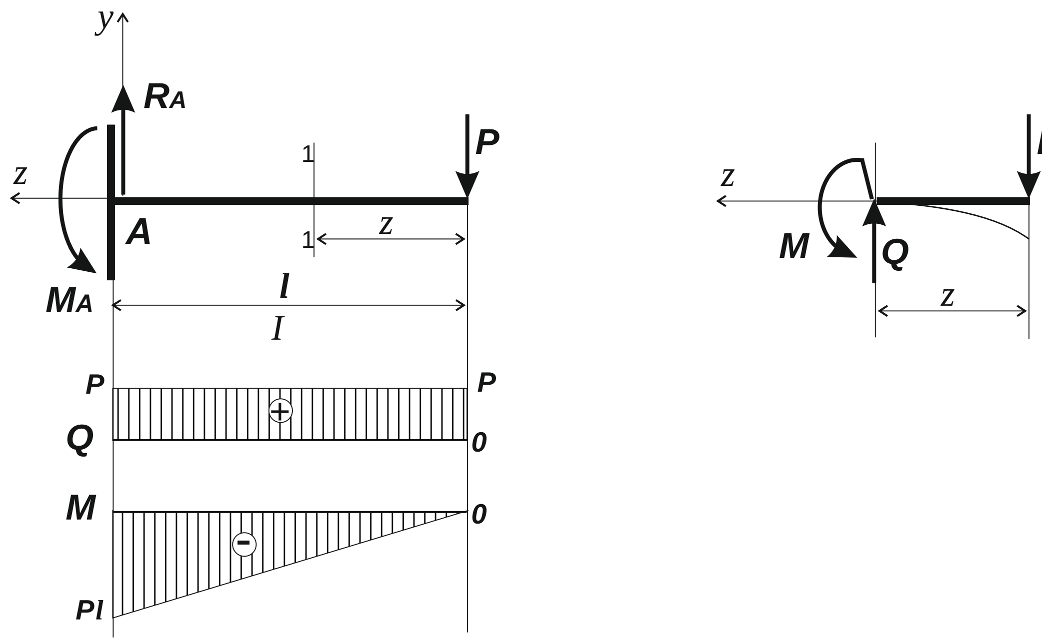


Балка имеет один участок нагружения, продольная ось z направлена от свободного конца к заделке.

В заделке возникают реактивные сила R_A и момент M_A. Их определяем из уравнений равновесия

$$\begin{cases} \sum Y_i = 0 \\ \sum M^i_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A - P = 0 \\ M_A - P \cdot l = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad R_A = P; \qquad M_A = P \cdot l$$

Определим поперечные силы и изгибающие моменты, пользуясь методом сечений. Рассмотрим равновесие отсеченной (правой) части балки



Координата сечения может принимать значения $0 \le z \le l$

В сечении возникает поперечная сила, равная внешней нагрузке, действующей на отсеченную часть

$Q_I = +P = const;$

и изгибающий момент, равный моменту внешней силы относительно центра тяжести сечения (линейно зависит от координаты сечения z)

$M_I = -P \cdot z$

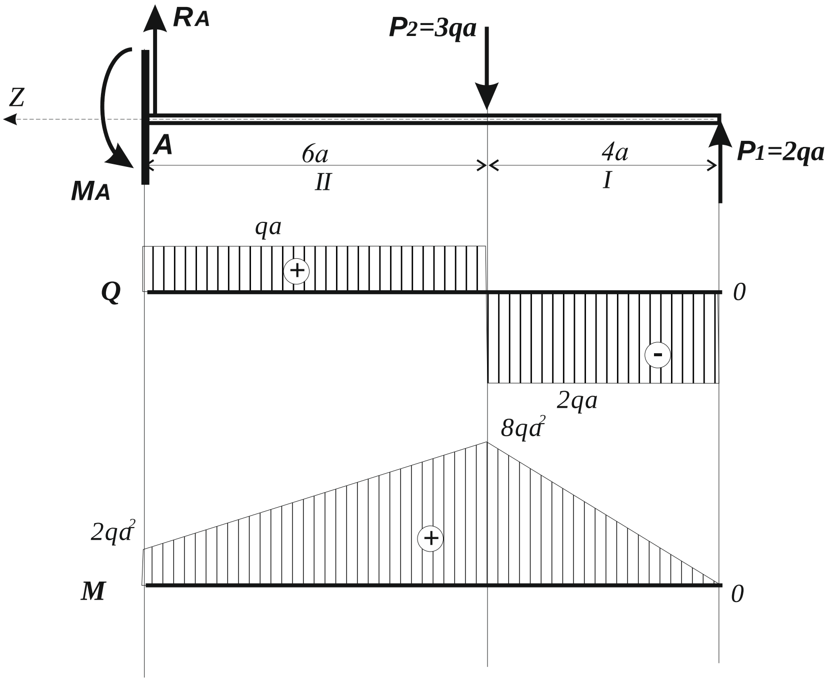
Вычисляем значения силы и момента на границах участка нагружения и строим эпюры:

$Q_{I(z=0)} = +P; \qquad Q_{I(z=l)} = +P$

$M_{I(z=0)} = 0; \qquad M_{I(z=l)} = -Pl$

Проверка правильности построения эпюры:
значение силы и момента в сечении $z=l$ по абсолютной величине совпадают с реакциями в заделке A.
Опасное сечение - в заделке, где момент наибольший по абсолютной величине.

Задача 2. Рассмотрим консольную балку под действием двух внешних сосредоточенных сил



Реакции в заделке R_A и момент M_A определяем из уравнений равновесия

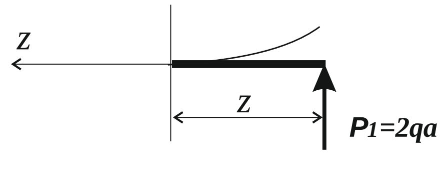
$$\begin{cases}\sum Y_i = 0 \\ \sum M^i_A = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A + P_1 - P_2 = 0 \\ M_A + P_1 \cdot 10a - P_2 \cdot 6a = 0\end{cases}$$

$$R_A = -P_1 + P_2 = qa;$$

$$M_A = -P_1 \cdot 10a + P_2 \cdot 6a = -2qa^2$$

Балка имеет два участка нагружения

I участок: $0 \le z \le 4a$ (справа)



$$Q_1 = -P_1 = -2qa$$

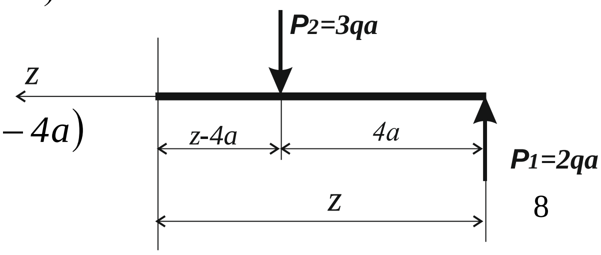
$$M_1 = P_1 z = 2qa \cdot z$$

Тогда на границах участка

$$Q_{1(z=0)} = -2qa \qquad Q_{1(z=4a)} = -2qa$$

$$M_{1(z=0)} = 0 \qquad M_{1(z=4a)} = +8qa^2$$

II участок: $4a \le z \le 10a$ (справа)



$$Q_2 = -P_1 + P_2 = +qa$$

$$M_2 = +P_1 z - P_2(z-4a) = +2qa \cdot z - 3qa(z-4a)$$

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=4a)} = +qa$ $\qquad\qquad\qquad$ $Q_{2(z=10a)} = +qa$

$M_{2(z=4a)} = +8qa^2$ $\qquad\qquad\qquad$ $M_{2(z=10a)} = +2qa^2$

Строим эпюры.

Проверка правильности построения эпюры:

значение силы и момента в сечении $z=10a$ по абсолютной величине совпадают с реакциями в заделке A.

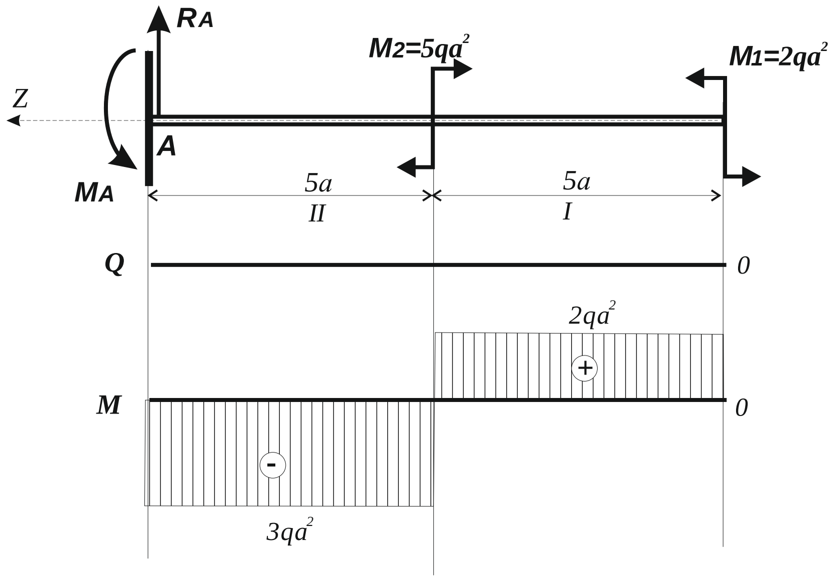
Опасное сечение - в сечении, где момент наибольший

$M\,max = +8qa^2$

<u>Правила контроля эпюр:</u>

Если на балку действуют только сосредоточенные силы, эпюра Q ступенчатая, в сечении, где приложена сила Р, происходит скачок на величину этой силы. Эпюра M линейная, в сечении, где приложена внешняя сила, на эпюре возникает излом (угол), вершина излома направлена навстречу силе.

Задача 3. Рассмотрим консольную балку под действием внешних сосредоточенных моментов



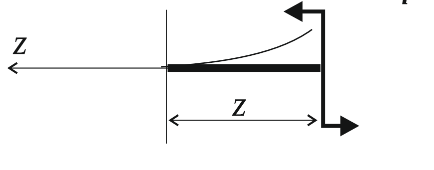
Реакции в заделке R_A и момент M_A определяем из уравнений равновесия

$$\begin{cases} \sum Y_i = 0 \\ \sum M^i_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = 0 \\ M_A + M_1 - M_2 = 0 \end{cases}$$

$$M_A = -M_1 + M_2 = +3qa^2$$

Балка имеет два участка нагружения

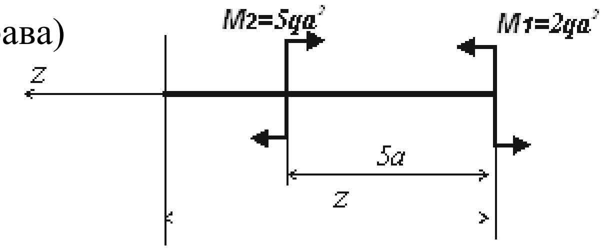
I участок: $\qquad 0 \le z \le 5a$ (справа)



$Q_1 = 0$

$M_1 = +M_1 = +2qa^2 = const$

II участок: $5a \le z \le 10a$ (справа)



$Q_2 = 0$

$M_2 = +M_1 - M_2 = -3qa^2 = const$

Строим эпюры.

Проверка: значение силы и момента в сечении $z=10a$ по абсолютной величине совпадают с реакциями в заделке A.

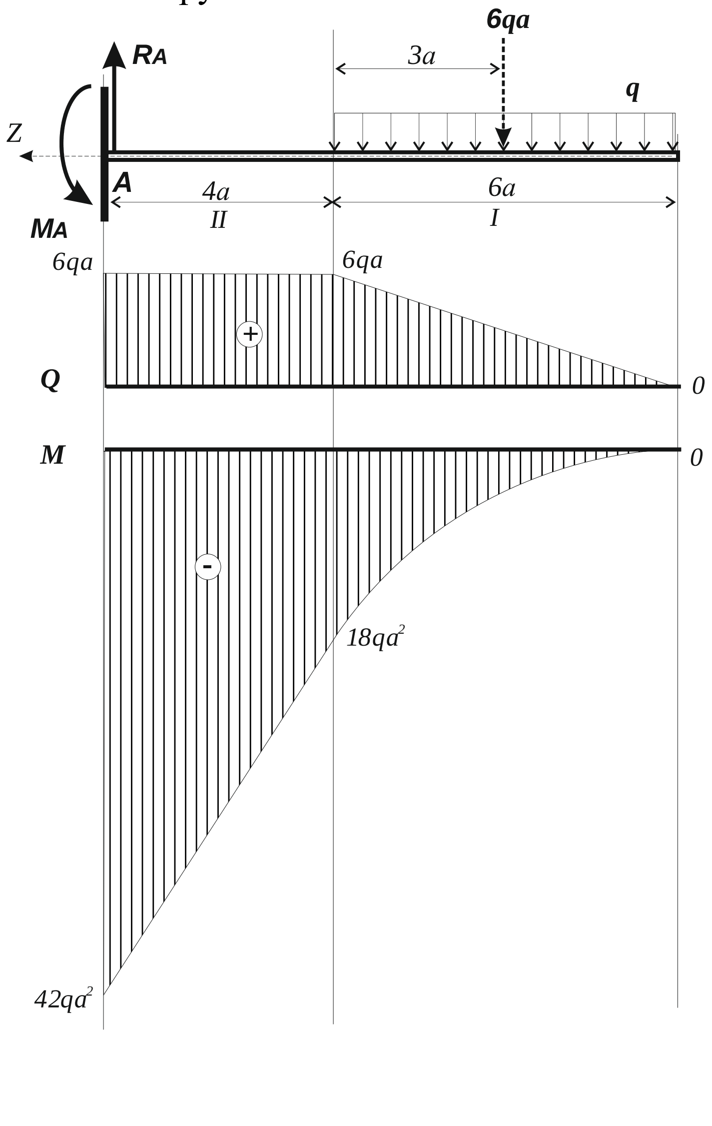
Опасное участок - тот, где момент наибольший по абсолютной величине

$M\,max = -3qa^2$

Правила контроля эпюр:

Если на балку действуют только сосредоточенные моменты, поперечные силы $Q=0$. Эпюра M ступенчатая, в сечении, где приложен внешний момент, на эпюре происходит скачок на величину этого момента.

Задача 4. Рассмотрим консольную балку под действием равномерно распределенной нагрузки



Здесь $q\ [кН/м]$ - интенсивность распределенной нагрузки, сила $6qa\ [кН]$, показанная пунктиром – равнодействующая распределенной нагрузки
Реакции в заделке R_A и момент M_A определяем из уравнений равновесия

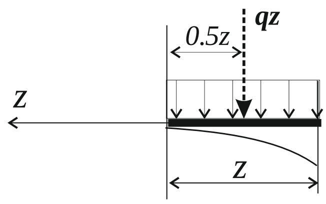
$$\begin{cases} \sum Y_i = 0 \\ \sum M^i_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A - 6qa = 0 \\ M_A - 6qa \cdot 7a = 0 \end{cases}$$

$$R_A = 6qa;$$

$$M_A = 42qa^2$$

Балка имеет два участка нагружения

I участок: $0 \le z \le 6a$ (справа)



Здесь сила qz - равнодействующая распределенной нагрузки на отсеченной части балки

$Q_1 = +qz$ *линейная зависимость от координаты сечения z*

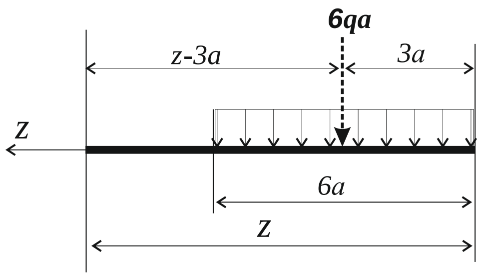
$M_1 = -qz \cdot 0{,}5z = -0{,}5qz^2$ *параболическая зависимость от координаты сечения z*

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = 0$ $\qquad$ $Q_{1(z=6a)} = +6qa$

$M_{1(z=0)} = 0$ $\qquad$ $M_{1(z=6a)} = -18qa^2$

II участок: $6a \le z \le 10a$ (справа)



$Q_2 = +6qa = const$

$M_2 = -6qa(z - 3a)$ *линейная зависимость от координаты сечения z*

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=6a)} = +6qa$ $\qquad$ $Q_{2(z=10a)} = +6qa$

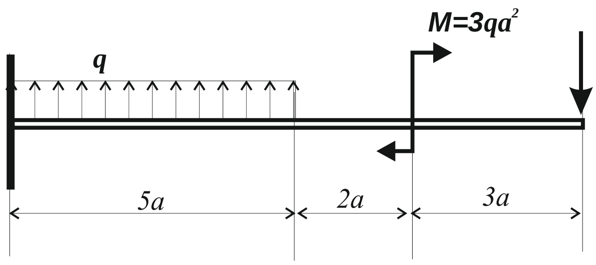
$M_{2(z=6a)} = -18qa^2$ $\qquad$ $M_{2(z=10a)} = -42qa^2$

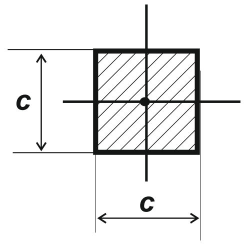
Строим эпюры.

Проверка: значение силы и момента в сечении $z=10a$ по абсолютной величине совпадают с реакциями в заделке A.
Опасное сечение - в заделке, где момент наибольший по абсолютной величине
<u>Правила контроля эпюр:</u>
Если на балку действует распределенная нагрузка, поперечные силы Q изменяются по линейной зависимости, эпюра – наклонная прямая. Изгибающий момент M изменяется по параболическому закону, эпюра – парабола, причем, выпуклость параболы направлена навстречу распределенной нагрузке.
На участке, где распределенная нагрузка уже не действует, поперечная сила постоянная, а момент линейный.

Задача 5. Рассмотрим консольную балку под действием всех типов внешних нагрузок

Построить эпюры внутренних силовых факторов, подобрать поперечное сечение заданной формы.





Исходные данные: $q = 10$ *кН/м*, $a = 0{,}1$ *м*, $[\sigma] = 100$ *МПа*

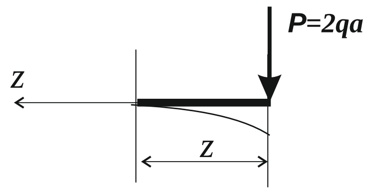
Реакции в заделке R_A и момент M_A определяем из уравнений равновесия

$$\begin{cases} \sum Y_i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A + 5qa - P = 0 \\ M_A - M - P \cdot 10a + 5qa \cdot 2{,}5a = 0 \end{cases}$$

$$R_A = -5qa + P = -3qa;$$

$$M_A = M + P \cdot 10a - 5qa \cdot 2{,}5a = +10{,}5qa^2$$

Балка имеет три участка нагружения



I участок: $0 \le z \le 3a$ (справа)

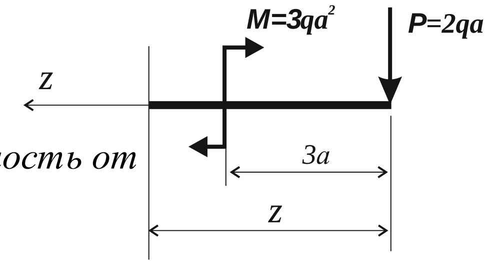
$$Q_1 = +P = +2qa = const$$

$$M_1 = -P \cdot z = -2qa \cdot z \quad \text{линейная зависимость от } z$$

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = +2qa$ $\qquad$ $Q_{1(z=3a)} = +2qa$

$M_{1(z=0)} = 0$ $\qquad$ $M_{1(z=3a)} = -6qa^2$



II участок: $3a \le z \le 5a$ (справа)

$$Q_2 = +P = const$$

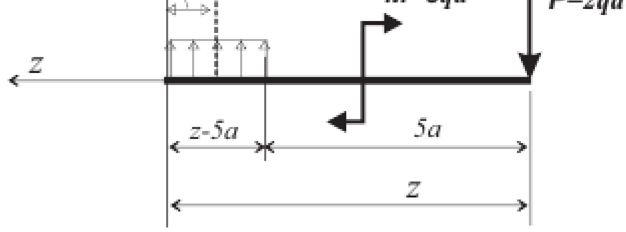
$$M_2 = -P \cdot z - M = -2qa \cdot z - 3qa^2 \quad \text{линейная зависимость от координаты сечения } z$$

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=3a)} = +2qa$ $\qquad$ $Q_{2(z=5a)} = +2qa$

$M_{2(z=3a)} = -9qa^2$ $\qquad$ $M_{2(z=5a)} = -13qa^2$

III участок: $5a \le z \le 10a$



$Q_3 = +P - q\cdot(z-5a) = +2qa - q(z-5a)$ *линейная зависимость от z*

$M_3 = -P\cdot z - M + q(z-5a)\cdot 0{,}5(z-5a) = -2qa\cdot z - 3qa^2 + 0{,}5q(z-5a)^2$ *парабола*

Тогда на границах участка

$Q_{3(z=5a)} = +2qa$ $\qquad$ $Q_{3(z=10a)} = -3qa$

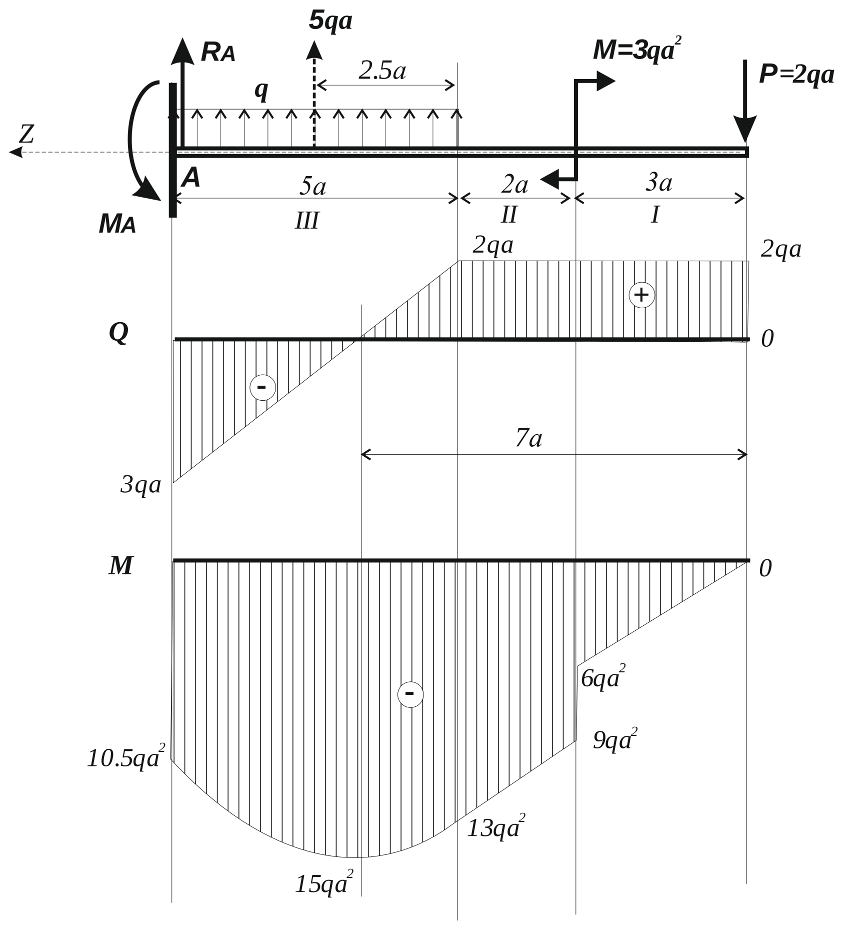
$M_{3(z=5a)} = -13qa^2$ $\qquad$ $M_{3(z=10a)} = -10{,}5qa^2$

Максимальное по модулю значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату опасного сечения:

$Q_3 = +P - q\cdot(z-5a) = 0 \Rightarrow$ $\qquad$ $z = \dfrac{P+5qa}{q} = 7a$

Тогда $M_{max} = M_{3(z=7a)} = -15{,}0qa^2$

Строим эпюры.



Проверка правильности построения эпюры:

значение силы и момента в сечении $z=10a$ по абсолютной величине совпадают с реакциями в заделке A.

Правила контроля эпюр:

Если на балку действует распределенная нагрузка, поперечные силы Q изменяются по линейной зависимости, эпюра – наклонная прямая. Изгибающий момент M изменяется по параболическому закону, эпюра – парабола, причем, выпуклость параболы направлена навстречу распределенной нагрузке.

Вершина параболы M находится в сечении, где эпюра поперечной силы Q пересекает нулевую линию. Максимум, если распределенная нагрузка направлена вниз. Минимум, если распределенная нагрузка направлена вверх.

Опасное сечение там, где момент наибольший по абсолютной величине $M_{max} = M_{3(z=7a)} = -15{,}0\,qa^2$ - по этому значению изгибающего момента ведется расчет на прочность.

Условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} = \frac{15qa^2}{W_x} \le [\sigma]$$

$$\Rightarrow \quad W_x \ge \frac{15qa^2}{[\sigma]} = \frac{15 \cdot 10000 \cdot 0{,}1^2}{100 \cdot 10^6} = 15 \cdot 10^{-6} \ \text{м}^3 = 15{,}0 \ \text{см}^3$$

Подбор квадратного сечения

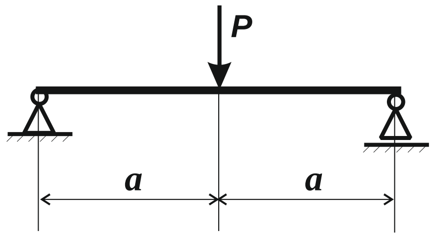
Осевой момент сопротивления прямоугольника (h=c, b=c)

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{c^3}{6}$$

$$c \ge \sqrt[3]{6W_x} = \sqrt[3]{6 \cdot 15{,}0} = 4{,}48\,\text{см}$$

площадь сечения $\quad F = c^2 = 20{,}07\,\text{см}^2$

Задача 6. Шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенной силой



На шарнирных опорах возникают вертикальные реактивные силы R_A и R_B . Их определяем из уравнений равновесия

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R_A \cdot 2a + P \cdot a = 0 \\ R_B \cdot 2a - P \cdot a = 0 \end{cases}$$

$$R_A = +0{,}5P; \qquad R_B = +0{,}5P;$$

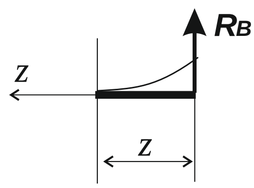
проверка

$$\sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A + R_B - P = 0;$$

проверка сошлась

Определим поперечные силы и изгибающие моменты, пользуясь методом сечений. Балка имеет два участка нагружения, продольную ось z направляем от шарнирной опоры к середине балки.

I участок: $0 \le z \le a$ (справа)



$$Q_1 = -R_B = -0{,}5P = const$$

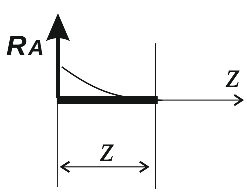
$$M_1 = +R_B \cdot z = +0{,}5Pz \quad \textit{линейная зависимость}$$

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = -0{,}5P$ $\qquad Q_{1(z=a)} = -0{,}5P$

$M_{1(z=0)} = 0$ $\qquad M_{1(z=a)} = +0{,}5Pa$

II участок: $0 \le z \le a$ (слева)



$$Q_2 = +R_A = +0{,}5P = const$$

$$M_2 = +R_A \cdot z = +0{,}5Pz \quad \textit{линейная зависимость}$$

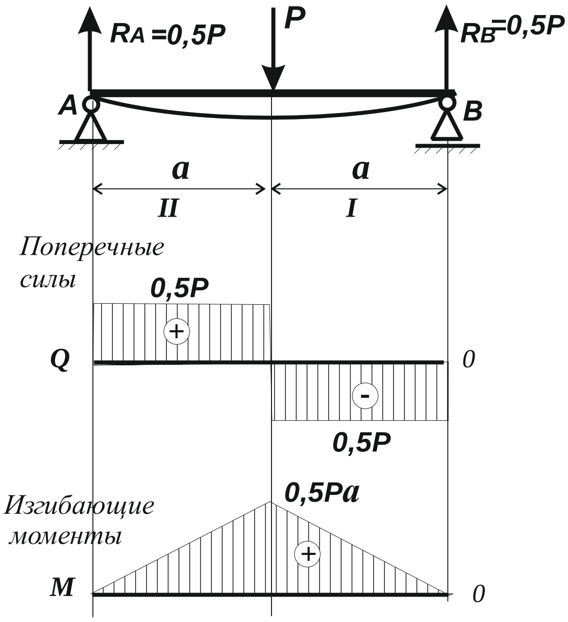
Тогда на границах участка

$Q_{2(z=0)} = +0{,}5P$ $\qquad Q_{2(z=a)} = +0{,}5P$

$M_{2(z=0)} = 0$ $\qquad M_{2(z=a)} = +0{,}5Pa$

Опасное сечение там , где приложена внешняя сила *P* (момент наибольший по абсолютной величине).

Строим эпюры:



Проверка правильности построения эпюры:

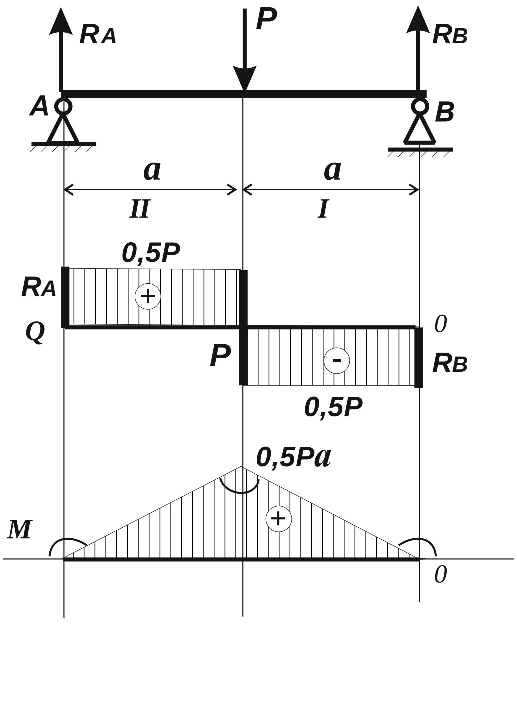
$$Q_{1(z=a)} = -0{,}5P \qquad Q_{2(z=a)} = +0{,}5P$$

Происходит скачок на величину внешней нагрузки P

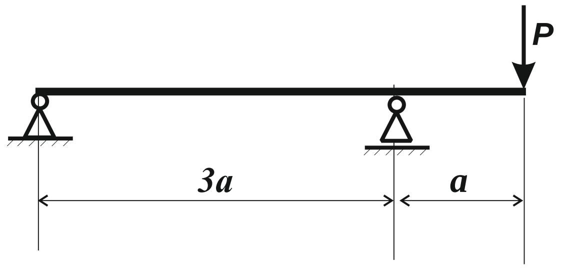
$$M_{1(z=a)} = +0{,}5Pa = M_{2(z=a)}$$

<u>Правила контроля эпюр:</u>

Если на балку действуют только сосредоточенные силы, эпюра Q ступенчатая, в сечении, где приложена сила P, происходит скачок на величину этой силы. Эпюра M линейная, в сечении, где приложена внешняя сила, на эпюре возникает излом (угол), вершина излома направлена навстречу силе.



Задача 7. Шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенной силой



На шарнирных опорах возникают вертикальные реактивные силы R_A и R_B . Их определяем из уравнений равновесия

$$\begin{cases} \sum M^i_B = 0 \\ \sum M^i_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R_A \cdot 3a - P \cdot a = 0 \\ R_B \cdot 3a - P \cdot 4a = 0 \end{cases}$$

$$R_A = -0{,}33P; \qquad R_B = +1{,}33P;$$

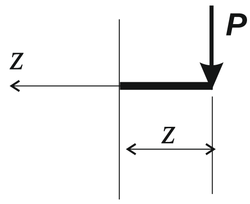
проверка

$$\sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A + R_B - P = 0;$$

проверка сошлась

Определим поперечные силы и изгибающие моменты, пользуясь методом сечений. Балка имеет два участка нагружения, продольную ось z направляем от шарнирной опоры к середине балки.

I участок: $0 \le z \le a$ (справа)



$Q_1 = +P = const$

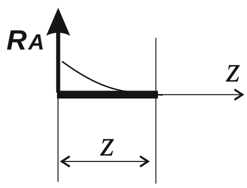
$M_1 = -Pz$ *линейная зависимость*

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = +P$ $\qquad$ $Q_{1(z=a)} = +P$

$M_{1(z=0)} = 0$ $\qquad$ $M_{1(z=a)} = -Pa$

II участок: $0 \le z \le a$ (слева)



$Q_2 = +R_A = const$

$M_2 = +R_A \cdot z$ *линейная зависимость*

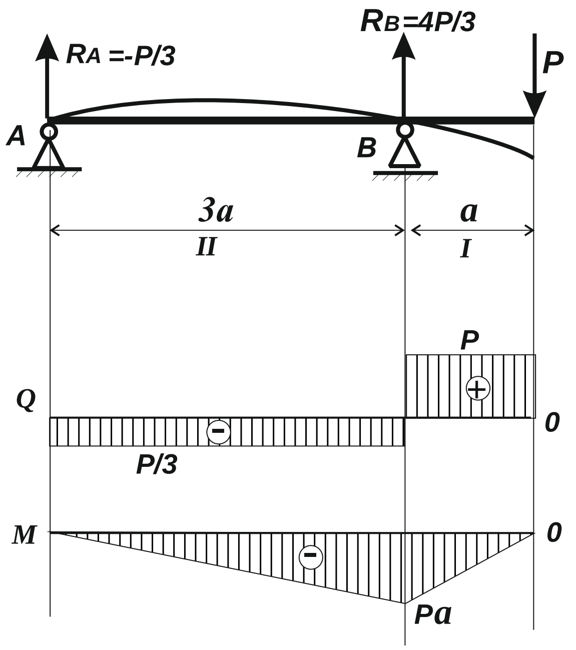
Тогда на границах участка

$Q_{2(z=0)} = -0{,}33P$ $\qquad$ $Q_{2(z=a)} = -0{,}33P$

$M_{2(z=0)} = 0$ $\qquad$ $M_{2(z=a)} = -0{,}33P \cdot 3a = -Pa$

Опасное сечение - в шарнире *B*, там момент наибольший по абсолютной величине.

Строим эпюры:



Проверка правильности построения эпюры:

$$Q_{1(z=a)} = +P \qquad Q_{2(z=a)} = -0{,}33P$$

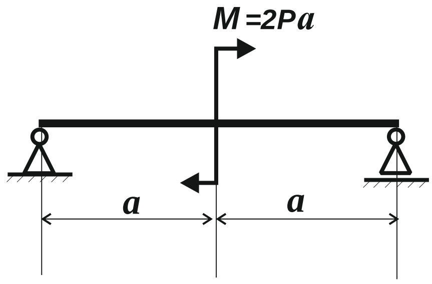
Происходит скачок на величину реакции $R_B = 1{,}33P$

$$M_{1(z=a)} = -Pa = M_{2(z=a)}$$

<u>Правила контроля эпюр:</u>

Если на балку действуют только сосредоточенные силы, эпюра Q ступенчатая, в сечении, где приложена сила P, происходит скачок на величину этой силы. Эпюра M линейная, в сечении, где приложена внешняя сила, на эпюре возникает излом, вершина излома направлена навстречу силе.

Задача 8. Шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенным моментом



На шарнирных опорах возникают вертикальные реактивные силы R_A и R_B . Их определяем из уравнений равновесия

$$\begin{cases}\sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-R_A \cdot 2a - M = 0 \\ R_B \cdot 2a - M = 0\end{cases}$$

$$R_A = \frac{-M}{2a} = \frac{-2Pa}{2a} = -P; \qquad R_B = \frac{+M}{2a} = \frac{+2Pa}{2a} = +P;$$

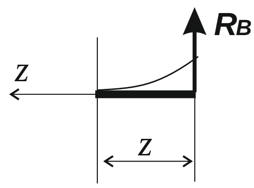
проверка

$$\sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A + R_B = 0;$$

проверка сошлась

Определим поперечные силы и изгибающие моменты, пользуясь методом сечений. Балка имеет два участка нагружения, продольную ось z направляем от шарнирной опоры к середине балки.

I участок: $0 \le z \le a$ (справа)



$Q_1 = -R_B = -P = const$

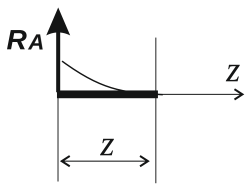
$M_1 = +R_B \cdot z = +Pz$ *линейная зависимость*

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = -P$ $\qquad$ $Q_{1(z=a)} = -P$

$M_{1(z=0)} = 0$ $\qquad$ $M_{1(z=a)} = +Pa$

II участок: $0 \le z \le a$ (слева)



$Q_2 = +R_A = -P = const$

$M_2 = +R_A \cdot z = -Pz$ *линейная зависимость*

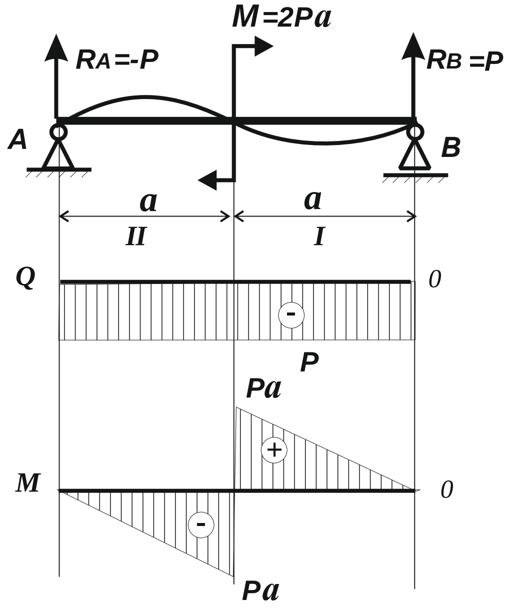
Тогда на границах участка

$Q_{2(z=0)} = -P$ $\qquad$ $Q_{2(z=a)} = -P$

$M_{2(z=0)} = 0$ $\qquad$ $M_{2(z=a)} = -Pa$

Опасные сечения – слева и справа от точки приложения внешнего момента *M*.

Строим эпюры:



Проверка правильности построения эпюры:

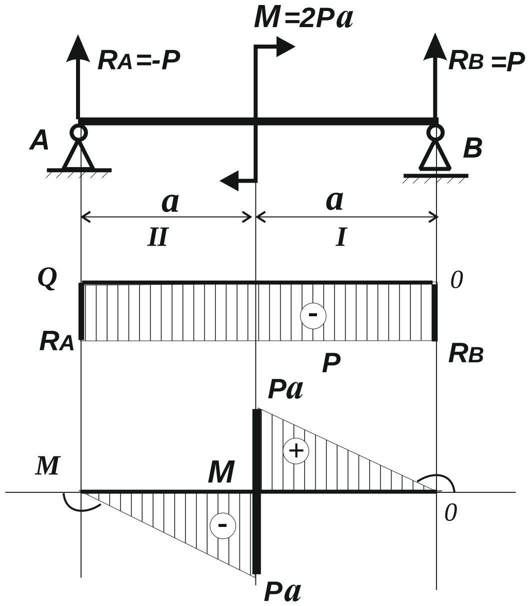
$$Q_{1(z=a)} = Q_{2(z=a)} = -P$$

$$M_{1(z=a)} = +Pa \qquad M_{2(z=a)} = -Pa$$

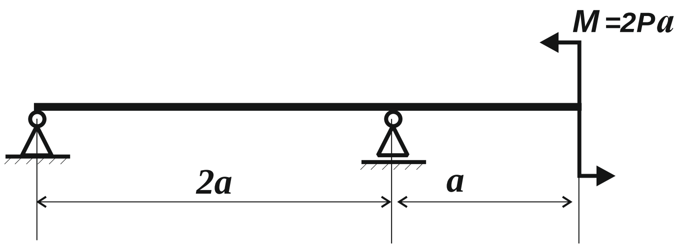
Происходит скачок на величину внешнего момента $M = 2Pa$

<u>Правила контроля эпюр:</u>

Если на балку действуют сосредоточенные силы и моменты, эпюра *Q* ступенчатая, в сечении, где приложена сила, происходит скачок на величину этой силы. Момент на эпюре *Q* не отражается. Эпюра *M* линейная, в сечении, где приложена внешняя сила, на эпюре возникает излом, вершина излома направлена навстречу силе. В сечении, где приложен внешний момент, на эпюре *M* происходит скачок на величину этого момента.



Задача 9. Шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенным моментом



На шарнирных опорах возникают вертикальные реактивные силы R_A и R_B . Их определяем из уравнений равновесия

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R_A \cdot 2a + M = 0 \\ R_B \cdot 2a + M = 0 \end{cases}$$

$$R_A = \frac{+M}{2a} = \frac{+2Pa}{2a} = +P; \qquad R_B = \frac{-M}{2a} = \frac{-2Pa}{2a} = -P;$$

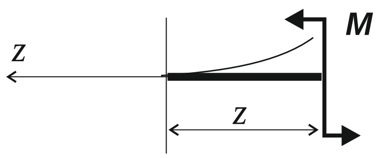
проверка

$$\sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A + R_B = 0;$$

проверка сошлась

Определим поперечные силы и изгибающие моменты, пользуясь методом сечений. Балка имеет два участка нагружения, продольную ось z направляем от шарнирной опоры к середине балки.

I участок: $0 \le z \le a$ (справа)



$Q_1 = 0$

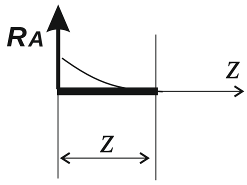
$M_1 = +M = +2Pa = const$

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = 0$ $\qquad$ $Q_{1(z=a)} = 0$

$M_{1(z=0)} = +2Pa$ $\qquad$ $M_{1(z=a)} = +2Pa$

II участок: $0 \le z \le a$ (слева)



$Q_2 = +R_A = +P = const$

$M_2 = +R_A \cdot z = +Pz$ $\qquad$ *линейная зависимость*

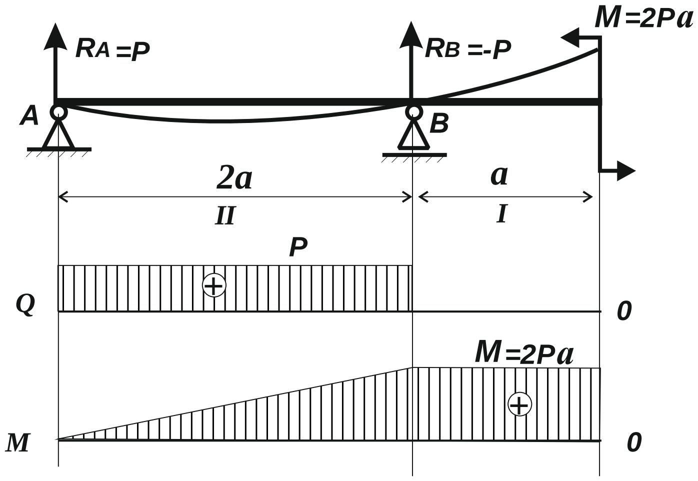
Тогда на границах участка

$Q_{2(z=0)} = +P$ $\qquad$ $Q_{2(z=a)} = +P$

$M_{2(z=0)} = 0$ $\qquad$ $M_{2(z=a)} = +P \cdot 2a = +2Pa$

Опасные сечения – на консольном участке.

Строим эпюры:



Проверка правильности построения эпюры:

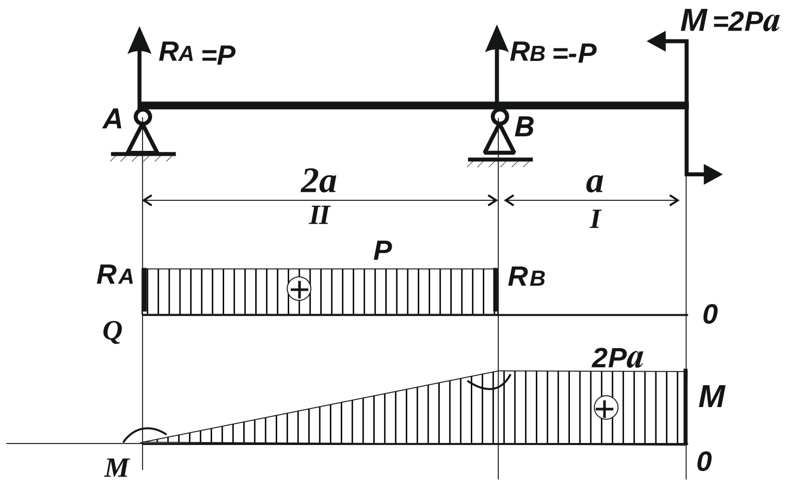
$Q_{1(z=a)} = 0 \qquad\qquad Q_{2(z=a)} = +P$

Происходит скачок на величину реакции R_B

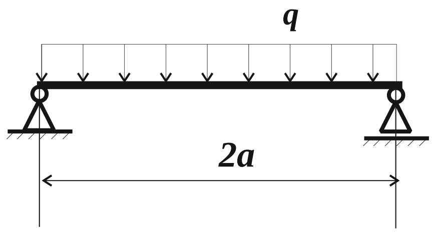
$M_{1(z=a)} = +Pa = M_{2(z=a)}$

<u>Правила контроля эпюр:</u>

Если на балку действуют сосредоточенные силы и моменты, эпюра *Q* ступенчатая, в сечении, где приложена сила, происходит скачок на величину этой силы. Момент на эпюре *Q* не отражается. Эпюра *M* линейная, в сечении, где приложена внешняя сила, на эпюре возникает излом, вершина излома направлена навстречу силе. В сечении, где приложен внешний момент, на эпюре *M* происходит скачок на величину этого момента.



Задача 10. Шарнирно опертая балка, нагруженная распределенной нагрузкой



Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A, R_B. Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R_A \cdot 2a + q \cdot 2a \cdot a = 0 \\ R_B \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0 \end{cases}$$

$$R_A = +qa; \qquad R_B = +qa;$$

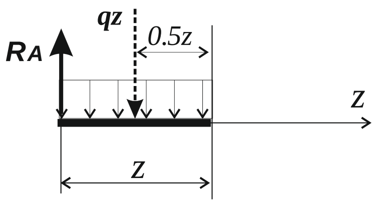
проверка

$$\sum Y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B - 2qa = 0$$

проверка сошлась

Балка имеет один участок нагружения. Определим поперечные силы и изгибающие моменты, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \le z \le 2a$ (слева)



$Q_1 = +R_A - qz$ *линейная зависимость*

$M_1 = +R_A z - qz \cdot \dfrac{z}{2} = +R_A z - 0{,}5qz^2$ *параболическая зависимость*

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = +R_A = +qa \qquad Q_{1(z=2a)} = +R_A - 2qa = -qa$

$M_{1(z=0)} = 0 \qquad M_{1(z=2a)} = +qa \cdot 2a - 2qa^2 = 0$

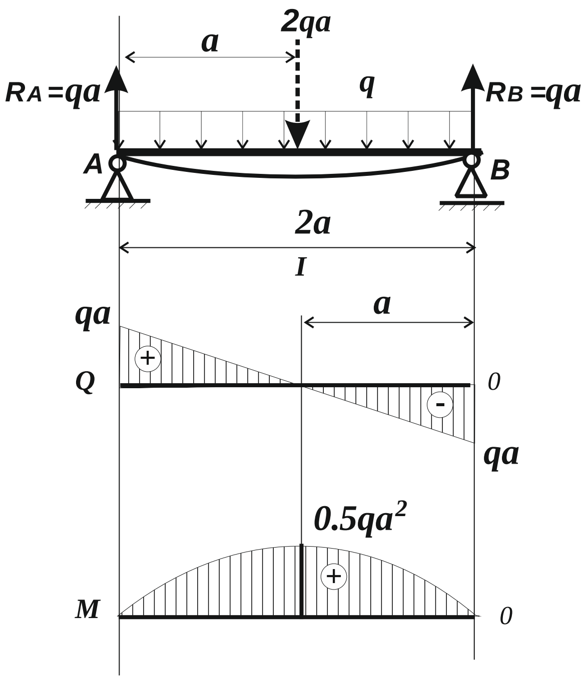
Максимальное значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату сечения:

$$Q_1 = +R_A - qz = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{R_A}{q} = a$$

Тогда $M_{1(z=a)} = +qa^2 - 0{,}5qa^2 = +0{,}5qa^2$

Опасное сечение там , где момент наибольший по абсолютной величине $M_{max} = +0{,}5qa^2$.

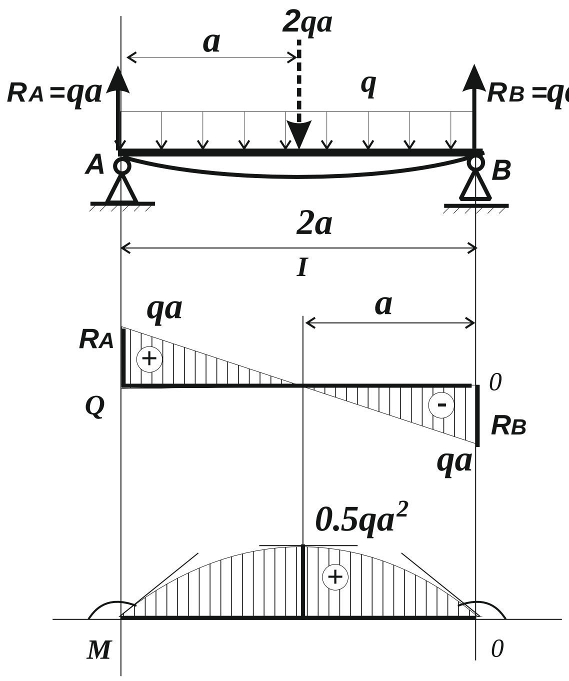
Строим эпюры:



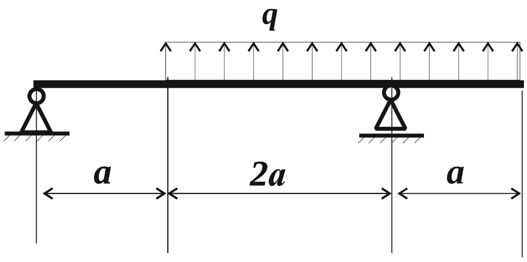
Правила контроля эпюр:

Если на балку действует распределенная нагрузка, поперечные силы *Q* изменяются по линейной зависимости, эпюра – наклонная прямая. Изгибающий момент *M* изменяется по параболическому закону, эпюра – парабола, причем, выпуклость параболы направлена навстречу распределенной нагрузке.

Вершина параболы *M* находится в сечении, где эпюра поперечной силы *Q* пересекает нулевую линию. Максимум, если распределенная нагрузка направлена вниз. Минимум, если распределенная нагрузка направлена вверх.



Задача 11. Шарнирно опертая балка, нагруженная распределенной нагрузкой



Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A, R_B. Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -R_A \cdot 3a - q \cdot 3a \cdot 0{,}5a = 0 \\ R_B \cdot 3a + q \cdot 3a \cdot 2{,}5a = 0 \end{cases}$$

$$R_A = -0{,}5qa; \qquad R_B = -2{,}5qa;$$

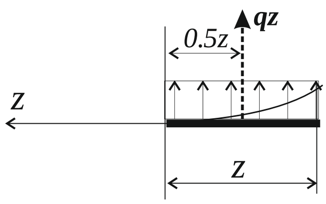
проверка

$$\sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A + R_B + 3qa = 0$$

проверка сошлась

Балка имеет три участка нагружения. Определим поперечные силы и изгибающие моменты, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \le z \le a$ (справа)



$Q_1 = -qz$ *линейная зависимость*

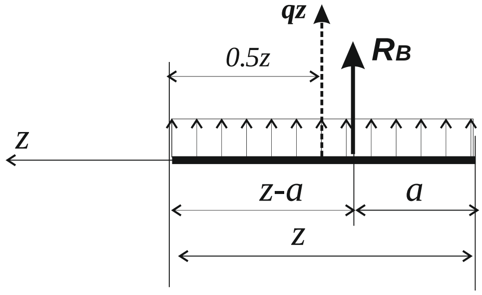
$M_1 = +qz \cdot 0{,}5z = +0{,}5qz^2$ *параболическая зависимость*

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = 0$ $\qquad Q_{1(z=a)} = -qa$

$M_{1(z=0)} = 0$ $\qquad M_{1(z=a)} = +0{,}5qa^2$

II участок: $a \le z \le 3a$ (справа)



$Q_2 = -qz - R_B$

$M_2 = +0{,}5qz^2 + R_B \cdot (z - a)$

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=a)} = -qa + 2{,}5qa = +1{,}5qa$ $\qquad Q_{2(z=3a)} = -3qa + 2{,}5qa = -0{,}5qa$

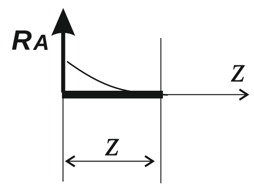
$M_{2(z=a)} = +0{,}5qa^2$ $\qquad M_{2(z=3a)} = +4{,}5qa^2 - 2{,}5qa \cdot 2a = -0{,}5qa^2$

Максимальное значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату сечения:

$$Q_2 = -qz - R_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = -\frac{R_B}{q} = 2{,}5a$$

Тогда $\quad M_{2(z=2,5a)} = +0{,}5q(2{,}5a)^2 - 2{,}5qa \cdot 1{,}5a = -0{,}625qa^2$

III участок: $\quad 0 \le z \le a \quad$ (слева)



$Q_3 = +R_A = -0{,}5qa = const$

$M_3 = +R_A \cdot z = -0{,}5qa \cdot z$ *линейная зависимость*

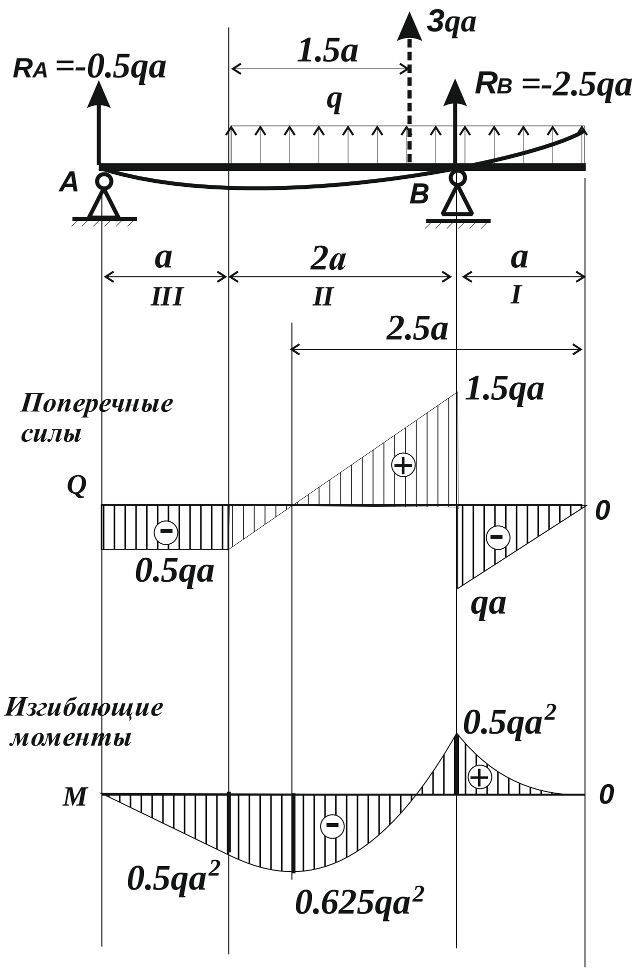
Тогда на границах участка

$Q_{3(z=0)} = -0{,}5qa \qquad\qquad Q_{2(z=a)} = -0{,}5qa$

$M_{3(z=0)} = 0 \qquad\qquad M_{2(z=a)} = -0{,}5qa^2$

Опасное сечение там, где момент наибольший по абсолютной величине $M_{max} = -0{,}625qa^2$.

Строим эпюры:



Проверка правильности построения эпюры:

$$Q_{3(z=a)} = -0{,}5qa = Q_{2(z=3a)}$$

$$M_{3(z=a)} = -0{,}5qa^2 = M_{2(z=3a)}$$

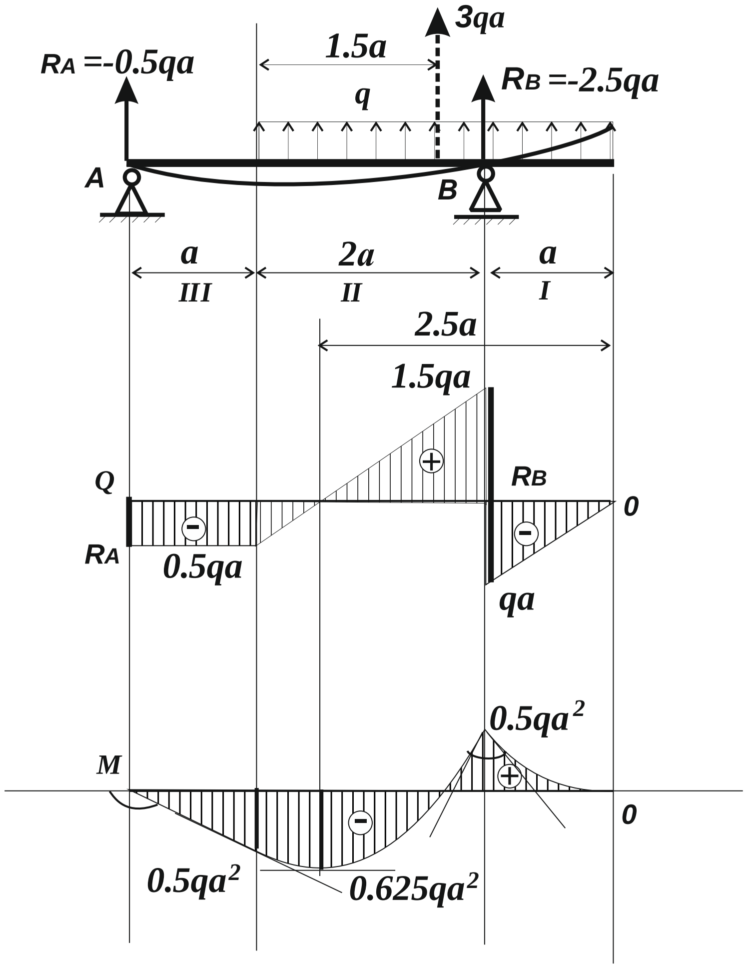
Правила контроля эпюр:

Если на балку действует распределенная нагрузка *q*, поперечные силы *Q* изменяются по линейному закону, эпюра – наклонная прямая. Изгибающий момент *M* изменяется по параболическому закону. Выпуклость параболы направлена навстречу распределенной нагрузке *q*.

Вершина параболы *M* находится в сечении, где эпюра поперечной силы *Q* пересекает нулевую линию. Максимум, если распределенная нагрузка направлена вниз. Минимум, если распределенная нагрузка направлена вверх.

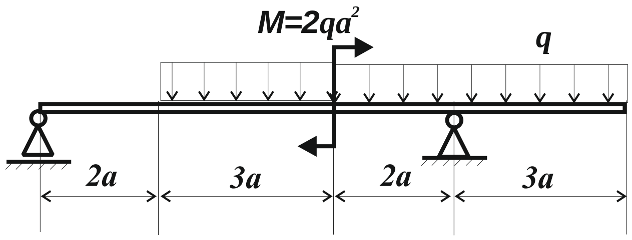
На участке, где распределенная нагрузка уже не действует, поперечная сила постоянная, а момент линейный.

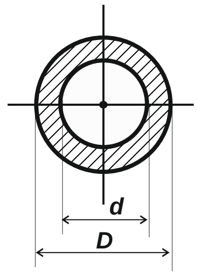
Если на балку действует сосредоточенная сила, в сечении, где она приложена, на эпюре *Q* происходит скачок на величину этой силы. На эпюре *M* возникает излом, вершина излома направлена навстречу силе.



Задача 12

Построить эпюры внутренних силовых факторов, подобрать поперечное сечение заданной формы





Исходные данные: *q =10 кН/м, a =0,1 м, [σ]=100 МПа, d=0,8D*

Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A, R_B. Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_A \cdot 7a - M + q \cdot 8a \cdot a = 0 \\ R_B \cdot 7a - M - q \cdot 8a \cdot 6a = 0 \end{cases}$$

$$R_A = \frac{-M + q \cdot 8a \cdot a}{7a} = \frac{-2qa^2 + q \cdot 8a \cdot a}{7a} = \frac{6qa^2}{7a} = 0{,}857qa;$$

$$R_B = \frac{+M + q \cdot 8a \cdot 6a}{7a} = \frac{+2qa^2 + q \cdot 8a \cdot 6a}{7a} = \frac{50qa^2}{7a} = 7{,}143qa;$$

проверка

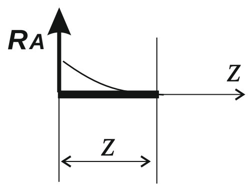
$$\sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A + R_B - q \cdot 8a =$$

$$= 0{,}857qa + 7{,}143qa - 8qa = 0;$$

проверка сошлась

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \le z \le 2a$ (слева)



$Q_1 = +R_A = const$

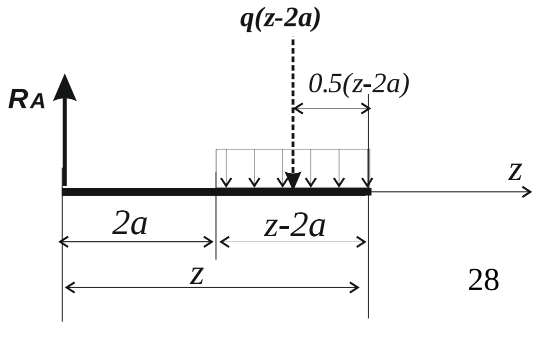
$M_1 = +R_A z$ *линейная зависимость*

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = +0{,}857qa$ $\qquad Q_{1(z=2a)} = +0{,}857qa$

$M_{1(z=0)} = 0$ $\qquad M_{1(z=2a)} = +0{,}857qa \cdot 2a = +1{,}714qa^2$

II участок: $2a \le z \le 5a$ (слева)



$Q_2 = +R_A - q(z - 2a)$

линейная зависимость

$$M_2 = +R_A z - q(z-2a)\cdot\frac{(z-2a)}{2} =$$

$$= +R_A z - \frac{q(z-2a)^2}{2} \qquad \textit{параболическая зависимость}$$

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=2a)} = +0{,}857qa$ $\qquad Q_{2(z=5a)} = +0{,}857qa - 3qa = -2{,}143qa$

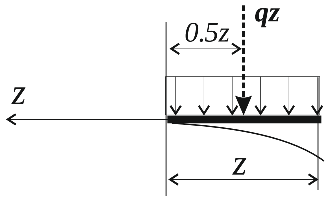
$M_{2(z=2a)} = +1{,}714qa^2$ $\qquad M_{2(z=5a)} = +0{,}857qa\cdot 5a - 4{,}5qa^2 = -0{,}215qa^2$

Максимальное значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату сечения:

$$Q_2 = +R_A - q(z-2a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{R_A + 2qa}{q} = 2{,}857\,a$$

Тогда $\quad M_{2(z=2.857a)} = \left(+0{,}857\cdot 2{,}857 - \frac{0{,}857^2}{2}\right)qa^2 = 2{,}081qa^2$

IV участок: $\quad 0 \le z \le 3a \quad$ (справа)



$Q_4 = +qz \qquad$ *линейная зависимость*

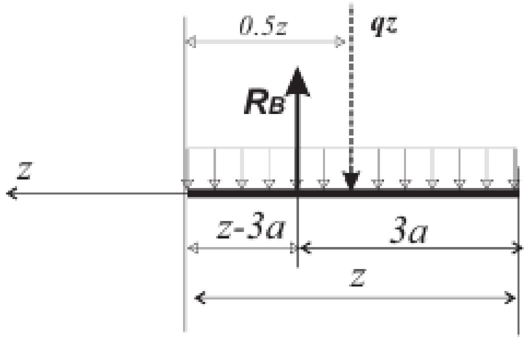
$M_4 = -qz\cdot\frac{z}{2} = -0{,}5qz^2 \qquad$ *параболическая зависимость*

Тогда на границах участка

$Q_{4(z=0)} = 0$ $\qquad Q_{4(z=3a)} = 3qa$

$M_{4(z=0)} = 0$ $\qquad M_{4(z=3a)} = -4{,}5qa^2$

III участок: $\quad 3a \le z \le 5a \quad$ (справа)



$Q_3 = +qz - R_B$

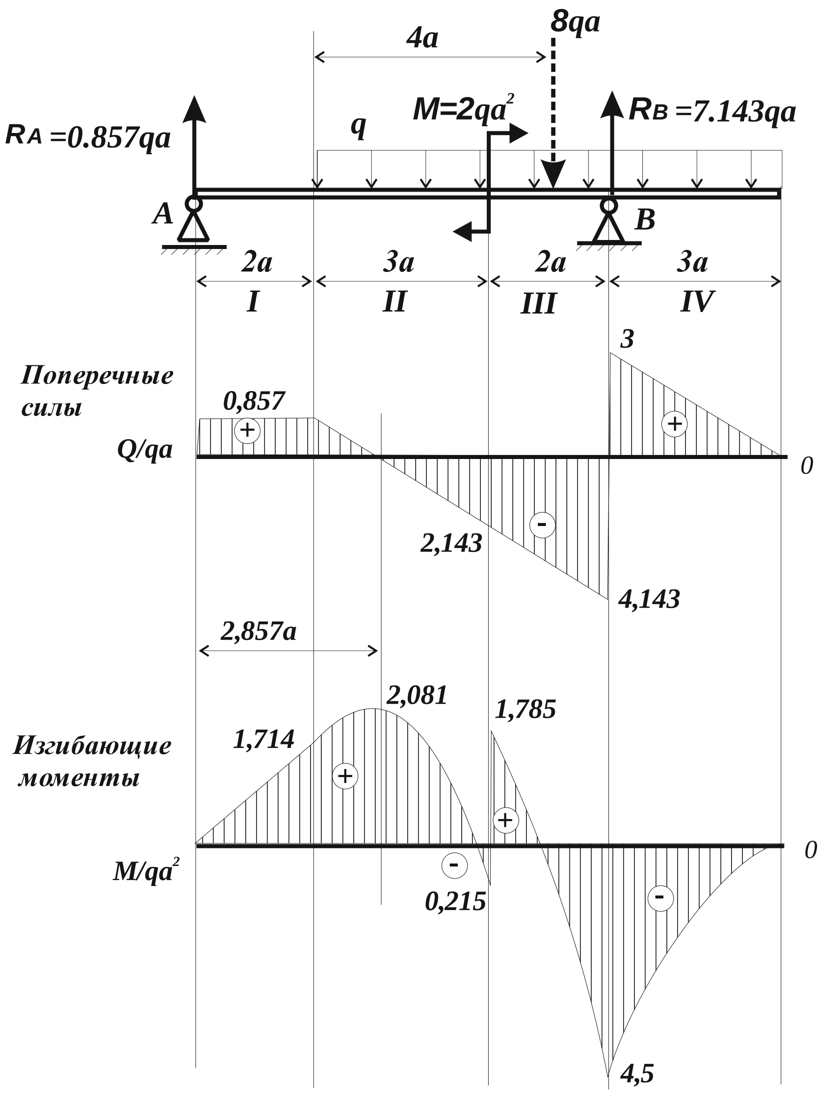
$M_3 = -0{,}5qz^2 + R_B\cdot(z-3a)$

Тогда на границах участка

$Q_{3(z=3a)} = +3qa - 7{,}143qa = -4{,}143qa$ $\qquad Q_{3(z=5a)} = +5qa - 7{,}143qa = -2{,}143qa$

$M_{3(z=3a)} = -4{,}5qa^2$ $\qquad M_{3(z=5a)} = -12{,}5qa^2 + 7{,}143qa\cdot 2a = 1{,}785qa^2$

Строим эпюры.



Проверка правильности построения эпюры:

$$Q_{3(z=5a)} = -2{,}143qa = Q_{2(z=5a)}$$

$$M_{3(z=5a)} = 1{,}785qa^2$$

$$M_{2(z=5a)} = -0{,}215qa^2$$

$$1{,}785qa^2 + 0{,}215qa^2 = 2qa^2 = M$$

(Имеет место скачок на величину внешнего момента M)

Опасным является сечение, где момент принимает наибольшее по абсолютной величине значение,

$M_{max} = -4{,}5qa^2$, по этому значению изгибающего момента ведется расчет на прочность.

Условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} = \frac{4{,}5qa^2}{W_x} \le [\sigma]$$

$$\Rightarrow \quad W_x \ge \frac{4{,}5qa^2}{[\sigma]} = \frac{4{,}5 \cdot 10000 \cdot 0{,}1^2}{100 \cdot 10^6} = 4{,}5 \cdot 10^{-6} \ \text{м}^3 = 4{,}52 \ \text{см}^3$$

Подбор кольцевого сечения

Осевой момент сопротивления кольца ($d=0,8D$)

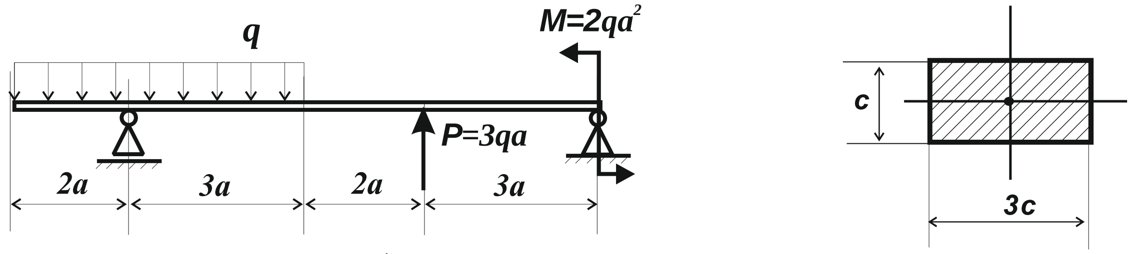
$$W_x = \frac{\pi D^3}{32}\left(1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right) \approx 0{,}1D^3\left(1-0{,}8^4\right) = 0{,}05904D^3$$

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{W_x}{0{,}05904}} = \sqrt[3]{\frac{4{,}5}{0{,}05904}} = 4{,}24\ см \quad d = 0{,}8\cdot 4{,}24 = 3{,}392\ см$$

площадь сечения $$F = \frac{\pi D^2}{4}\left(1-\left(\frac{d}{D}\right)^2\right) \approx 0{,}758\,D^2\left(1-0{,}8^2\right) = 5{,}08\,см^2$$

Задача 13

Построить эпюры внутренних силовых факторов, подобрать поперечное сечение заданной формы.



Исходные данные: $q = 10\ кН/м,\ a = 0{,}1\ м,\ [\sigma] = 100\ МПа$

Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A, R_B. Уравнения равновесия:

$$\begin{cases}\sum M_B^i = 0\\ \sum M_A^i = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-R_A\cdot 8a - P\cdot 3a + q\cdot 5a\cdot 7{,}5a + M = 0\\ R_B\cdot 8a + P\cdot 5a - q\cdot 5a\cdot 0{,}5a + M = 0\end{cases}$$

$$R_A = \frac{-P\cdot 3a + q\cdot 5a\cdot 7{,}5a + M}{8a} = \frac{-3qa\cdot 3a + q\cdot 5a\cdot 7{,}5a + 2qa^2}{8a} =$$

$$= \frac{30{,}5qa^2}{8a} = 3{,}8125qa \approx 3{,}81qa;$$

$$R_B = \frac{-P\cdot 5a + q\cdot 5a\cdot 0{,}5a - M}{8a} = \frac{-3qa\cdot 5a + q\cdot 5a\cdot 0{,}5a - 2qa^2}{8a} =$$

$$= \frac{-14{,}5qa^2}{8q} = -1{,}8125\,qa \approx -1{,}81\,qa;$$

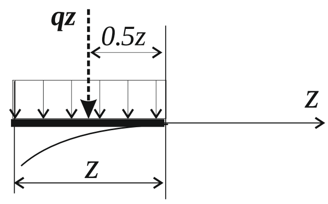
проверка $\sum Y_i = 0 \quad \Rightarrow$

$$R_A + R_B + P - q\cdot 5a = 3{,}81qa - 1{,}81qa + 3qa - 5qa = 0;$$

проверка сошлась

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \le z \le 2a$ (слева)



$$Q_1 = -qz \quad \text{линейная зависимость}$$

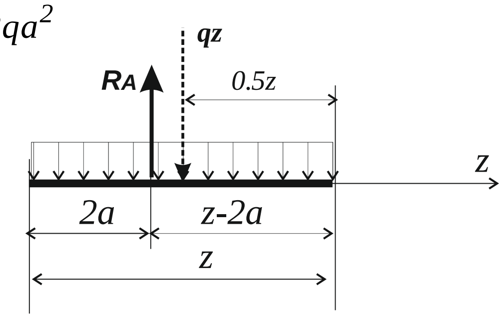
$$M_1 = -qz \cdot \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2} \quad \text{параболическая зависимость}$$

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = 0$ $\qquad$ $Q_{1(z=2a)} = -2qa$

$M_{1(z=0)} = 0$ $\qquad$ $M_{1(z=2a)} = -2qa^2$

II участок: $2a \le z \le 5a$ (слева)



$$Q_2 = -qz + R_A \quad \text{линейная зависимость}$$

$$M_2 = -\frac{qz^2}{2} + R_A(z-2a) \quad \text{параболическая зависимость}$$

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=2a)} = -2qa + 3{,}81qa = 1{,}81qa$ $\qquad$ $Q_{2(z=5a)} = -5qa + 3{,}81qa = -1{,}19qa$

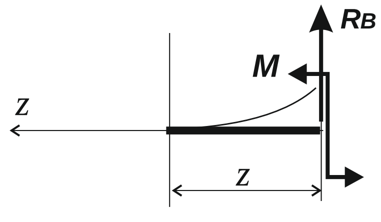
$M_{2(z=2a)} = -2qa^2$ $\qquad$ $M_{2(z=5a)} = -12{,}5qa^2 + 3{,}81qa \cdot 3a = -1{,}07qa^2$

Максимальное значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату сечения:

$$Q_2 = -qz + R_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{R_A}{q} = 3{,}81a$$

Тогда $\quad M_{2(z=3{,}81a)} = \left(-\frac{3{,}81^2}{2} + 3{,}81 \cdot 1{,}81\right)qa^2 = -0{,}36qa^2$

IV участок: $0 \le z \le 3a$ (справа)



$$Q_4 = -R_B = +1{,}81qa = const$$

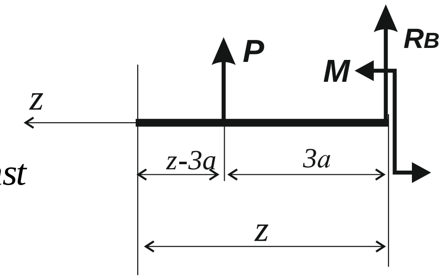
$$M_4 = +M + R_B \cdot z \quad \text{линейная зависимость}$$

Тогда на границах участка

$Q_{4(z=0)} = +1{,}81qa$ $\qquad$ $Q_{4(z=3a)} = +1{,}81qa$

$M_{4(z=0)} = +M = 2qa^2$ $\qquad$ $M_{4(z=3a)} = +2qa^2 - 1{,}81qa \cdot 3a = -3{,}43qa^2$

III участок: $3a \le z \le 5a$ (справа)



$$Q_3 = -R_B - P = +1{,}81qa - 3qa = -1{,}19qa = const$$

$$M_3 = +M + R_B \cdot z + P(z - 3a)$$ *линейная зависимость*

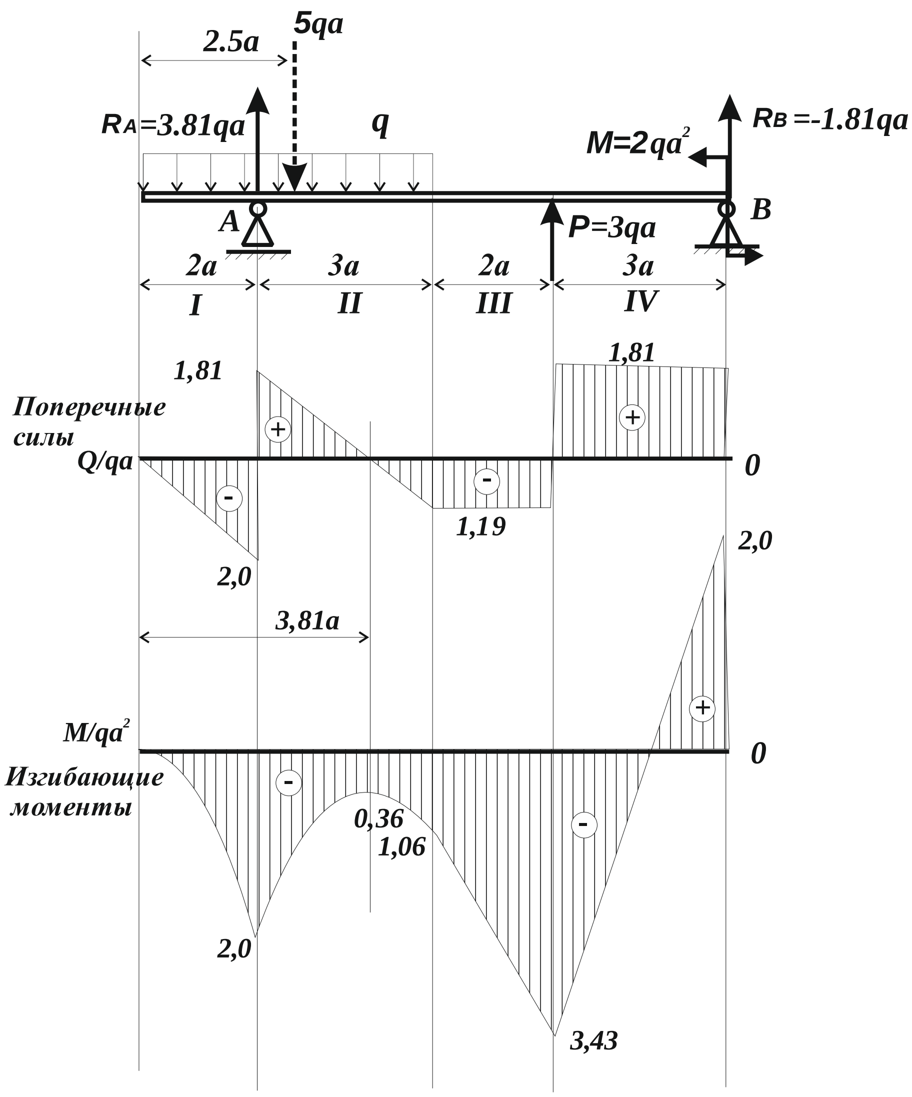
Тогда на границах участка

$Q_{3(z=3a)} = -1{,}19qa$ $\qquad$ $Q_{3(z=5a)} = -1{,}19qa$

$$M_{3(z=3a)} = +2qa^2 - 1{,}81qa \cdot 3a = -3{,}43qa^2$$

$$M_{3(z=5a)} = +2qa^2 - 1{,}81qa \cdot 5a + 3qa \cdot 2a = -1{,}05qa^2$$

Строим эпюры:



Проверка правильности построения эпюры:

$$Q_{3(z=5a)} = -1{,}19qa = Q_{2(z=5a)}$$

$$M_{3(z=5a)} = -1{,}05qa^2 \approx M_{2(z=5a)} = -1{,}07qa^2$$

(Имеет место погрешность, возникшая за счет округления значений реакций опор. На эпюре можно указать среднее значение $-1{,}06qa^2$ *)*

Опасным является сечение, где момент принимает наибольшее по абсолютной величине значение,
$M_{max} = -3{,}43qa^2$, по этому значению изгибающего момента ведется расчет на прочность.

Условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} = \frac{3{,}43qa^2}{W_x} \le [\sigma]$$

$$\Rightarrow \quad W_x \ge \frac{3{,}43qa^2}{[\sigma]} = \frac{3{,}43 \cdot 10000 \cdot 0{,}1^2}{100 \cdot 10^6} = 3{,}43 \cdot 10^{-6} \ \text{м}^3 = 3{,}43 \ \text{см}^3$$

Подбор прямоугольного сечения

Осевой момент сопротивления прямоугольника ($h=c$, $b=3c$)

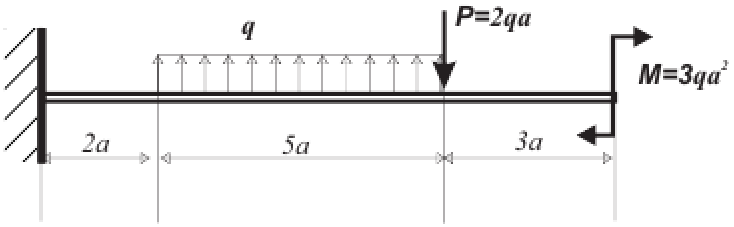
$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{3c \cdot (c)^2}{6} = \frac{c^3}{2}$$

$$c \ge \sqrt[3]{2W_x} = \sqrt[3]{2 \cdot 3{,}43} = 1{,}90 \ \text{см}$$

площадь сечения $\quad F = 3c^2 = 10{,}83\,\text{см}^2$

Задача 14. Рассмотрим консольную балку под действием всех типов внешних нагрузок

Построить эпюры внутренних силовых факторов.



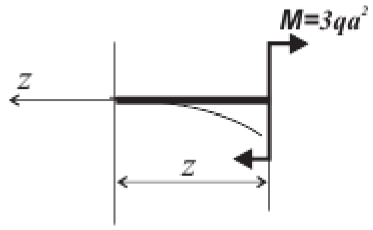
Исходные данные: *q =10 кН/м, a =0,1 м, [σ]=100 МПа*

Реакции в заделке R_A и момент M_A определяем из уравнений равновесия

$$\begin{cases}\sum Y_i = 0 \\ \sum M_A^i = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A + 5qa - P = 0 \\ M_A - M - P\cdot 7a + 5qa\cdot 4{,}5a = 0\end{cases}$$

$$R_A = -5qa + P = -3qa;$$

$$M_A = M + P\cdot 7a - 5qa\cdot 4{,}5a = -5{,}5qa^2$$

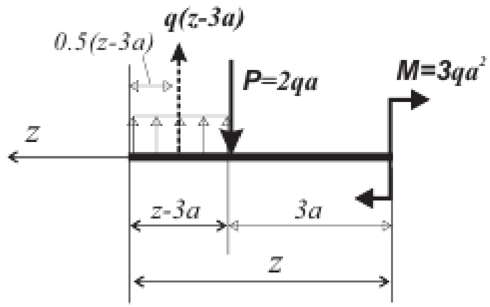


Балка имеет три участка нагружения

I участок: $0 \le z \le 3a$ (справа)

$$Q_1 = 0 = const$$

$$M_1 = -M = -3qa^2 = const$$



II участок: $3a \le z \le 8a$ (справа)

$$Q_2 = +P - q(z-3a) \qquad \textit{линейная зависимость от } z$$

$$M_2 = -M - P\cdot(z-3a) + q(z-3a)\cdot\frac{(z-3a)}{2} =$$

$$= -M - P\cdot(z-3a) + 0.5q(z-3a)^2 \quad \textit{парабола}$$

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=3a)} = +2qa$ $\qquad Q_{2(z=8a)} = +2qa - 5qa = -3qa$

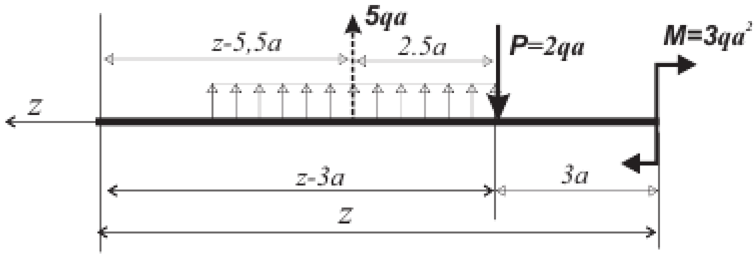
$M_{2(z=3a)} = -3qa^2$ $\qquad M_{2(z=8a)} = -3qa^2 - 2qa\cdot 5a + 0.5q\cdot(5a)^2 = -0.5qa^2$

Максимальное по модулю значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату опасного сечения:

$$Q_2 = +P - q\cdot(z-3a) = 0 \Rightarrow \qquad z = \frac{P+3qa}{q} = 5a$$

Тогда $M_{max} = M_{2(z=5a)} = -3qa^2 - 2qa\cdot 2a + 0.5q(2a)^2 = -5{,}0qa^2$

III участок: $8a \le z \le 10a$ (справа)



$Q_3 = +P - 5qa = -3qa = const$

$M_3 = -M - P \cdot (z - 3a) + 5qa \cdot (z - 5.5a)$ *линейная зависимость от z*

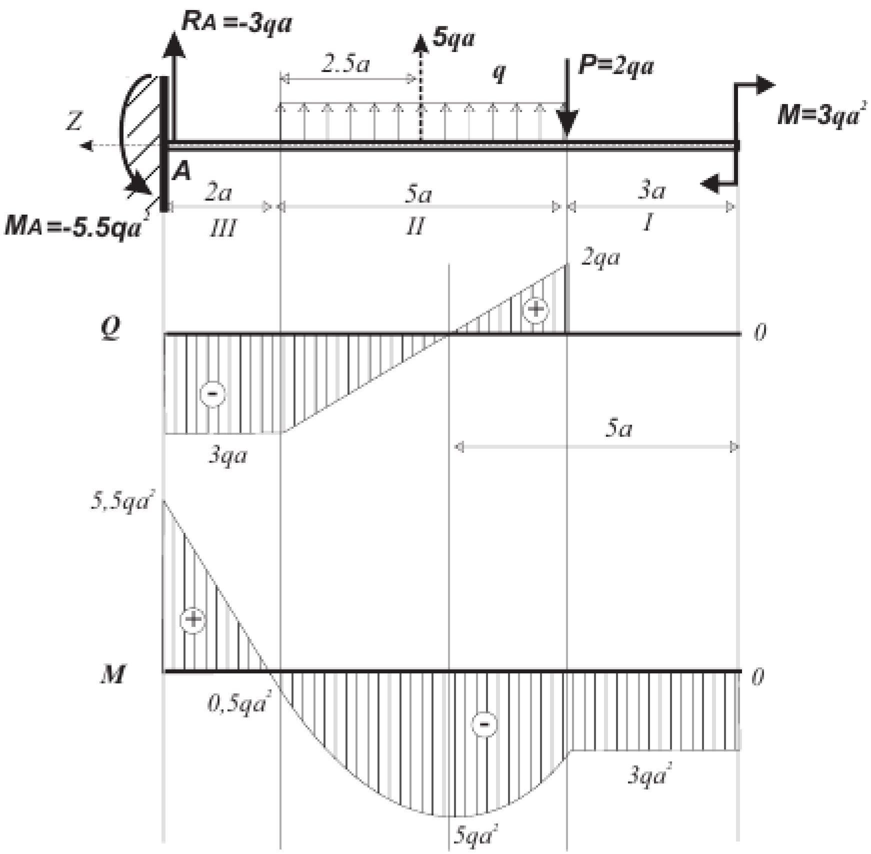
Тогда на границах участка

$Q_{3(z=8a)} = -3qa$ $Q_{3(z=10a)} = -3qa$

$M_{3(z=8a)} = -3qa^2 - 2qa \cdot 5a + 5qa \cdot 2{,}5a = -0{,}5qa^2$

$M_{3(z=10a)} = -3qa^2 - 2qa \cdot 7a + 5qa \cdot 4{,}5a = +5{,}5qa^2$

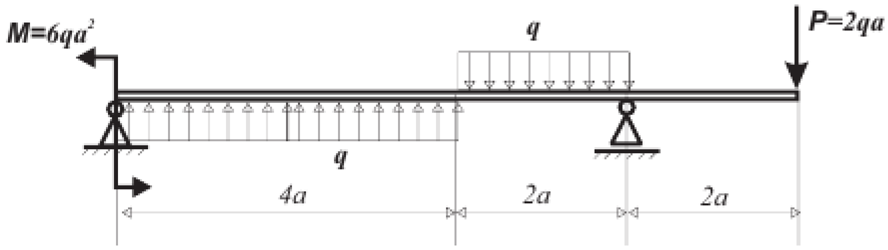
Строим эпюры.



Проверка правильности построения эпюры:

значение силы и момента в сечении *z=10a* по абсолютной величине совпадают с реакциями в заделке *A*.

Задача 16. Построить эпюры внутренних силовых факторов.



Исходные данные: $q=10$ *кН/м*, $a=0{,}1$ *м*, $[\sigma]=100$ *МПа*

Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A, R_B. Уравнения равновесия:

$$\begin{cases}\sum M_B^i = 0\\ \sum M_A^i = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-R_A\cdot 6a + M - P\cdot 2a - 4qa\cdot 4a + 2qa\cdot a = 0\\ R_B\cdot 6a + M - P\cdot 8a + 4qa\cdot 2a - 2qa\cdot 5a = 0\end{cases}$$

$$R_A = \frac{M - P\cdot 2a - 4qa\cdot 4a + 2qa\cdot a}{6a} = \frac{+6qa^2 - 2qa\cdot 2a - 16qa^2 + 2qa^2}{6a} =$$

$$= \frac{-12qa^2}{6a} = -2qa;$$

$$R_B = \frac{-M + P\cdot 8a - 4qa\cdot 2a + 2qa\cdot 5a}{6a} = \frac{-6qa^2 + 2qa\cdot 8a - 8qa^2 + 10qa^2}{6a} =$$

$$= \frac{12qa^2}{6q} = +2qa;$$

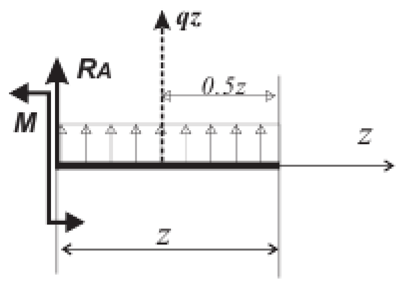
проверка $\qquad \sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow$

$$R_A + R_B - P + 4qa - 2qa = -2qa + 2qa - 2qa + 4qa - 2qa = 0;$$

проверка сошлась

Балка имеет три участка нагружения

I участок: $\quad 0 \le z \le 4a \quad$ (слева)



$Q_1 = +R_A + qz \qquad$ *линейная зависимость*

$M_1 = -M + R_A z + qz\cdot\dfrac{z}{2} = -M + R_A z + 0{,}5qz^2 \qquad$ *параболическая*

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = -2qa$ $\qquad$ $Q_{1(z=4a)} = -2qa + 4qa = +2qa$

$M_{1(z=0)} = -6qa^2$ $\qquad$ $M_{1(z=4a)} = -6qa^2 - 2qa \cdot 4a + 8qa^2 = -6qa^2$

Максимальное значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату сечения:

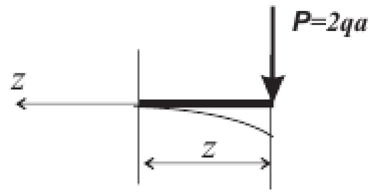
$$Q_1 = +R_A + qz = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{R_A}{q} = 2a$$

Тогда $M_{1(z=2a)} = (-6 - 2 \cdot 2 + 2)qa^2 = -8qa^2$

III участок: $\quad 0 \le z \le 2a$ $\quad$ (справа)

$Q_3 = +P = const$

$M_3 = -P \cdot z$ *линейная зависимость*



Тогда на границах участка

$Q_{3(z=0)} = +2qa$ $\qquad$ $Q_{3(z=2a)} = +2qa$

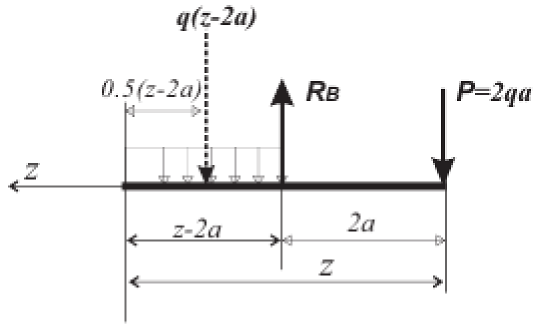
$M_{3(z=0)} = 0$ $\qquad$ $M_{3(z=2a)} = -4qa^2$

II участок: $\quad 2a \le z \le 4a$ $\quad$ (справа)

$Q_2 = +P - R_B + q(z-2a)$ *линейная зависимость*

$$M_2 = -P \cdot z + R_B \cdot (z-2a) - q(z-2a) \cdot \frac{(z-2a)}{2} =$$

$$= -P \cdot z + R_B \cdot (z-2a) - 0{,}5q(z-2a)^2 \quad \text{парабола}$$

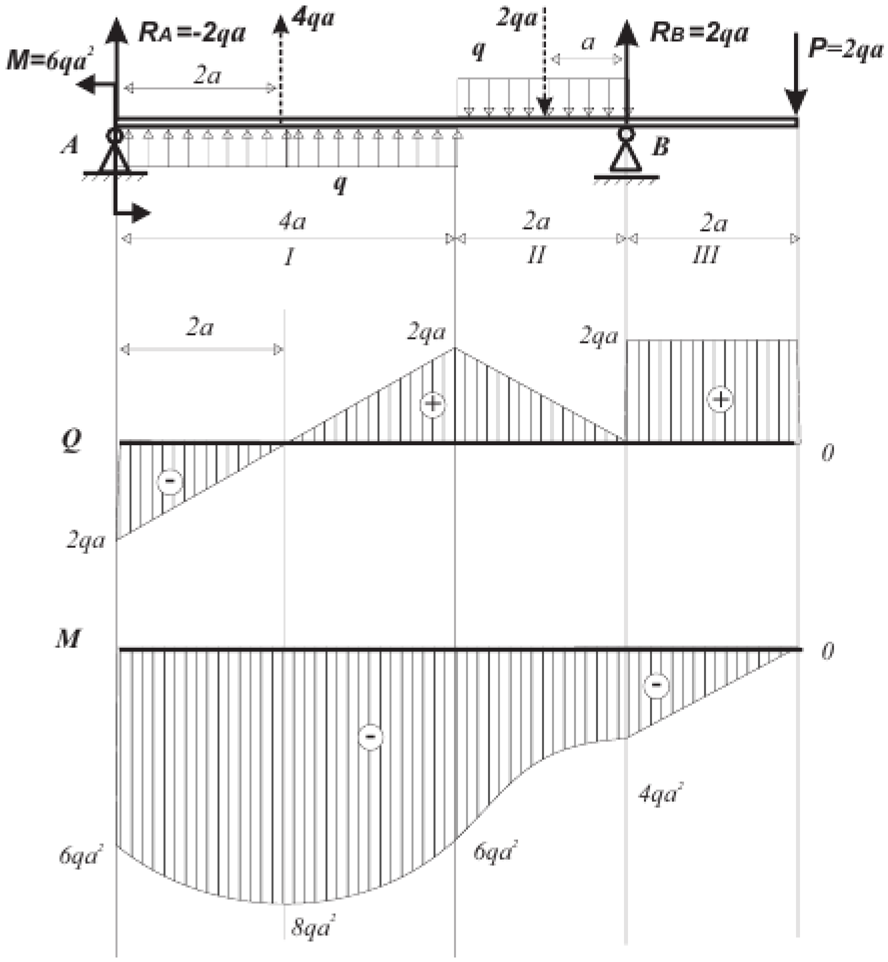


Тогда на границах участка

$Q_{2(z=2a)} = 0$ $\qquad$ $Q_{2(z=4a)} = +2qa$

$M_{2(z=2a)} = -4qa^2$ $\qquad$ $M_{2(z=4a)} = -6qa^2$

Строим эпюры.

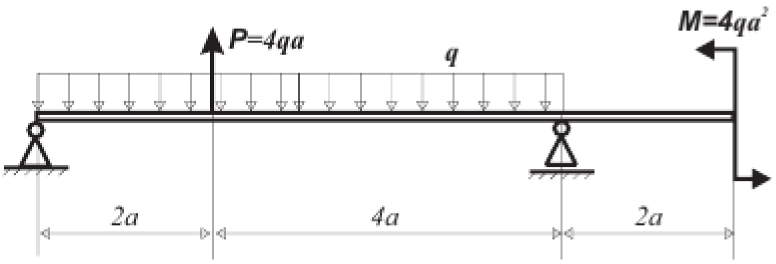


Проверка правильности построения эпюры:

$$Q_{1(z=4a)} = +2qa = Q_{2(z=4a)}$$

$$M_{1(z=4a)} = -6qa^2 = M_{2(z=4a)}$$

Задача 15. Построить эпюры внутренних силовых факторов.



Исходные данные: $q = 10$ *кН/м*, $a = 0{,}1$ *м*, $[\sigma] = 100$ *МПа*

Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A, R_B. Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_A \cdot 6a - P \cdot 4a + 6qa \cdot 3a + M = 0 \\ R_B \cdot 6a + P \cdot 2a - 6qa \cdot 3a + M = 0 \end{cases}$$

$$R_A = \frac{-P \cdot 4a + 6qa \cdot 3a + M}{6a} = \frac{-16qa^2 + 18qa^2 + 4qa^2}{6a} =$$

$$= \frac{6qa^2}{6a} = +qa;$$

$$R_B = \frac{-P \cdot 2a + 6qa \cdot 3a - M}{6a} = \frac{-8qa^2 + 18qa^2 - 4qa^2}{6a} =$$

$$= \frac{6qa^2}{6q} = +qa;$$

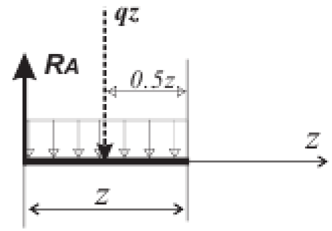
проверка $\qquad \sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow$

$$R_A + R_B + P - 6qa = qa + qa + 4qa - 6qa = 0;$$

проверка сошлась

Балка имеет три участка нагружения

I участок: $\qquad 0 \le z \le 2a$ $\quad$ (слева)



$Q_1 = +R_A - qz$ $\qquad$ *линейная зависимость*

$M_1 = +R_A z - qz \cdot \dfrac{z}{2} = +R_A z - 0{,}5qz^2$ $\quad$ *параболическая*

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = +qa$ $\qquad\qquad$ $Q_{1(z=2a)} = +qa - 2qa = -qa$

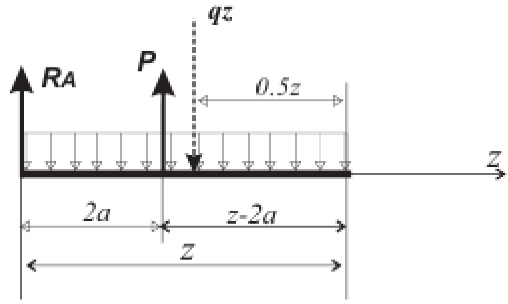
$M_{1(z=0)} = 0$ $\qquad\qquad$ $M_{1(z=2a)} = +qa \cdot 2a - 2qa^2 = 0$

Максимальное значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату сечения:

$Q_1 = +R_A - qz = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = \dfrac{R_A}{q} = a$

Тогда $M_{1(z=a)} = (+1 - 0{,}5)qa^2 = +0{,}5qa^2$

II участок: $2a \le z \le 6a$ (слева)



$Q_2 = +R_A - qz + P$ *линейная зависимость*

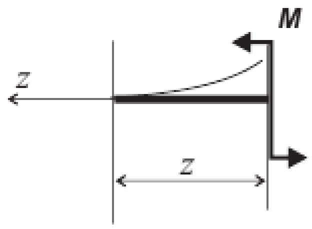
$M_2 = +R_A z - 0{,}5qz^2 + P \cdot (z - 2a)$ *парабола*

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=2a)} = +qa - 2qa + 4qa = +3qa \qquad Q_{2(z=6a)} = +qa - 6qa + 4qa = -qa$

$M_{2(z=2a)} = 0 \qquad M_{2(z=6a)} = +6qa^2 - 18qa^2 + 4qa \cdot 4a = +4qa^2$

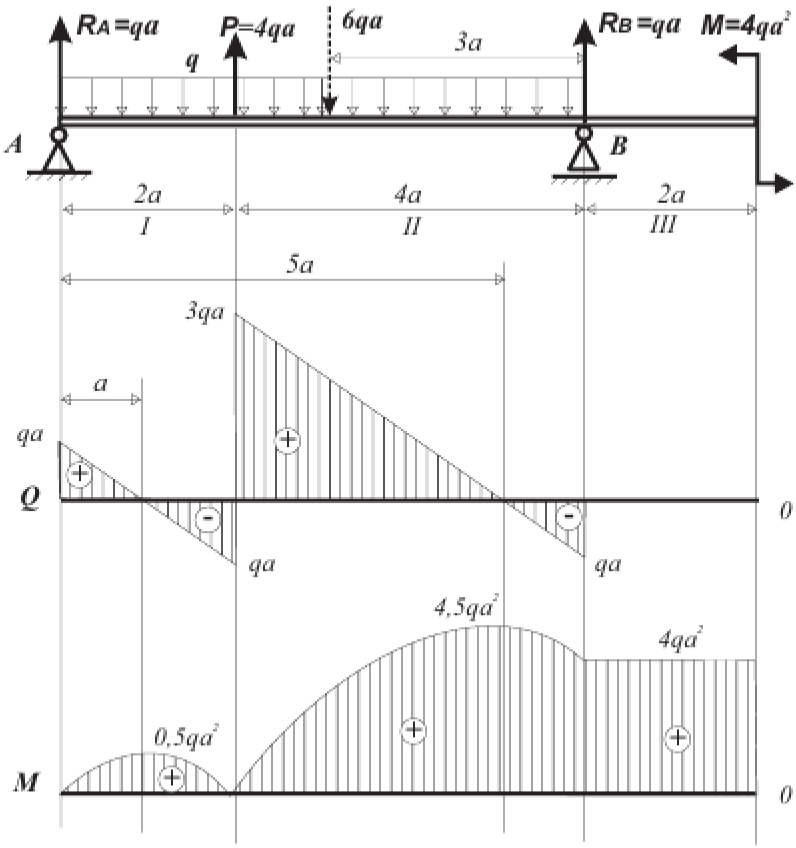
III участок: $0 \le z \le 2a$ (справа)



$Q_3 = 0 = const$

$M_3 = +M = +4qa^2 = const$

Строим эпюры.



Проверка правильности построения эпюры:

$Q_{2(z=6a)} = -qa$

$Q_{3(z=2a)} = 0$

(Имеет место скачок на величину опорной реакции R_B)

$M_{2(z=6a)} = +4qa^2 = M_{3(z=2a)}$